# Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 14 Giugno 2013

**Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)** Cognome e Nome______________________________

**1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = [(1,-1,0,0),(1,-1,1,0),(0,0,1,0)] \qquad K_h = \{(x,y,z,t) \mid 2x+y-z+(h-1)t=0,\ hx+y=0\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $K_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K_{-1}$.
(iii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $K_h^{\perp}$.
(iv) Scrivere una base di $L(H)$, completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$ e ortonormalizzarla.

(i) Per determinare una base di $K_h$ dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x+y-z+(h-1)t=0 \\ hx+y=0 \end{cases}$, si scrive la matrice
$M_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & h-1 \\ h & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e si osserva che una tale matrice ha rango 2 $\forall h \in \mathbb{R}$ in quanto la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinnate 1. Possiamo concludere che il sistema lineare ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Un sistema equivalenete è il seguente: $\begin{cases} y-z=-2x-(h-1)t \\ y=-hx \end{cases}$, con $x, t$ variabili libere. Applicando la regola di Cramer si trova:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2x-(h-1)t & -1 \\ -hx & 0 \end{vmatrix}}{1} = -hx; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2x-(h-1)t \\ 1 & -hx \end{vmatrix}}{1} = -(h-2)x+(h-1)t$$

Concludendo le soluzioni del sistema lineare sono $S_h = \{(x, -hx, -(h-2)x+(h-1)t, t) \text{ con } x, t \in \mathbb{R}\}$. La dimensione di $K_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$ è 2 e una sua base è la seguente: $B_h = [(1,-h,-h+2,0),(0,0,h-1,1)]$.

(ii) Per determinare una rappresentazione cartesiana di $L(H)$ osserviamo se $H$ è libero, si trova che il terzo vettore è uguale al primo meno il secondo, $H$ è legato. Dal sistema $H$ è possibile estrarre il sistema libero $[(1,-1,0,0),(0,0,1,0)]$, utilizzando un tale sistema si scrive una rappresentazione cartesiana:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$, dobbiamo imporre $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & z & t \end{vmatrix} = 0$, possiamo scrivere una rappresentazione cartesiana per $L(H) = \{(x,y,z,t) \mid x+y=0, t=0\}$.

Osserviamo che $K_{-1} = \{(x,y,z,t) \mid 2x+y-z-2t=0, x-y=0\}$, a questo punto $L(H) \cap K_{-1}$ si trova in corrispondenza del sistema lineare:

$\begin{cases} x+y=0 \\ t=0 \\ 2x+y-z-2t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$, la matrice dl sistema è la seguente: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il suo rango è 4 in quanto la matrice ha determinante $-2$ , il sistema lineare ammette $\infty^{4-4} = \infty^0 = 1$ soluzione, quella banale. In conclusione la dimensione di $L(H) \cap K_{-1}$ è 0 e una sua base è $T = \varnothing$.

(iii) Osserviamo che una base di $K_h^{\perp}$ è data dal sistema $S = [(2,1,-1,h-1),(h,1,0,0)]$ (sono i coefficienti di $x, y, z, t$ delle equazioni che definiscono $K_h$). Costruiamo la matrice: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & h-1 \\ h & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si trova che il determinante di tale matrice vale $h^2-1$. Possiamo concludere che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $K_h^\perp$ per $h \neq \pm 1$.

(iv) Dobbiamo estendere una base di $L(H)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$, scriviamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e a seguire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, una base di $\mathbb{R}^4$ estesa è la seguente: $B = [(1,-1,0,0), (0,0,1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)]$, osserviamo che gli ultimi tre vettori sono ortogonali, non resta che rendere ortogonale a questi anche il vettore $(1,-1,0,0)$ :

$$u_1 = (0,0,1,0), \, u_2 = (1,0,0,0), \, u_3 = (0,0,0,1)$$

$u_4 = (1,-1,0,0) - \dfrac{(1,-1,0,0)\cdot(0,0,1,0)}{(0,0,1,0)\cdot(0,0,1,0)}(0,0,1,0) - \dfrac{(1,-1,0,0)\cdot(1,0,0,0)}{(1,0,0,0)\cdot(1,0,0,0)}(1,0,0,0) - \dfrac{(1,-1,0,0)\cdot(0,0,0,1)}{(0,0,0,1)\cdot(0,0,0,1)}(0,0,0,1) =$

$= (1,-1,0,0) - (1,0,0,0) = (0,-1,0,0)$. In definitiva una base orgonale e anche normalizzata è la seguente: $\overline{B} = [(0,-1,0,0), (0,0,1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)]$.

**2**. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & h+1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di $M_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice ammette inversa.
(iii) Determinare l'elemento di posto $(2,4)$ della matrice inversa di $M_h$ per $h=0$.

(i) Applicando Laplace alla prima colonna si trova $|M_h| = \begin{vmatrix} 0 & h+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & h+1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -h^2 - h + 2$.

$h^2 + h - 2 = 0 \iff h = -2$ o $h = 1$. Dunque per $h \neq -2$ o $h \neq 1$ il rango di $M_h$ è $4$. Vediamo i casi particolari:

<u>$h=-2$</u>

$M_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si trova che il rango è $3$.

<u>$h=1$</u>

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si trova che il rango è $3$.

(ii) La matrice $M_h$ è invertibile $\forall h \neq -2, 1$.

(iii) Per calcolare l'elemento di posto $(2,4)$ della matrice $M_0^{-1}$ non è necessario calcolare l'inversa di $M_0$. E' sufficiente riflettere su come si calcola l'inversa di una matrice, bisogna calcolare soltanto il cofattore $M_{0_{42}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, e dividere tale quantità per il determinante della matrice $M_0$ che è uguale a 2 (ricordare che l'inversa si ottiene facendo la trasposta della matrice dei cofattori e dividendo ciascun termine per il determinante). In conclusione possiamo dire che l'elemento di posto $(2,4)$ della matrice $M_0^{-1}$ è $-\dfrac{1}{2}$.

**3**. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^3+bx^2+cx+d) \quad &= \quad (a+d)x^2+(a+b-c)x+c-d \end{aligned}$$

(i) Dire se una tale applicazione lineare è suriettiva.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K$ erf .

(i) Utilizzando la nozione di isomorfismo possiamo scrivere la seguente applicazione:

$$F:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$F(a,b,c,d) = (a+d, a+b-c, c-d)$

Calcoliamo la matrice $A_F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, si trova $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Si trova facilmente che una tale matrice ha rango 3 (le prime tre colonne sono linearmente indipendenti), dunque $F$ è suriettiva. Trasportando tale risultato, mediante l'isomorfismo, possiamo dire che $f$ è suriettiva e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[x^2+x, x, -x+1]$.

(ii) Se $\operatorname{Im} F$ ha dimensione 3, allora per l'equazione dimensionale $KerF$ deve avere dimensione $1$. In corrsipondenza del sistema lineare:
$\begin{cases} a+d=0 \\ a+b-c=0 \\ c-d=0 \end{cases}$, come al solito la matrice del sistema lineare è $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e la base si trova: $u = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$ $(1,-2,-1,-1)$. In forma compatta $u=(1,-2,-1,-1)$.
Dunque $K$ erf ha dimensione 1 è una base è data dal vettore $x^3-2x^2-x-1$.

**4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (-2x+2y-3z, -x+y-3z, -z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di $f$, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base $B$ di autovettori e scrivere la matrice $P$ che diagonalizza $A_f$.

(i) Studiare la diagonalizzabilità di $f$, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base $B$ di autovettori e scrivere la matrice $P$ che diagonalizza $A_f$.

La matrice $A_f$ è la seguente: $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determiniamo il polinomio caratteristico ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-2-\lambda)+2\right] = (-1-\lambda)\left[\lambda^2+\lambda\right]$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$ .

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, si ha:

$A_f + I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{-x + 2y - 3z = 0$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\{x = 2y - 3z$

$V_1 = \{(2y - 3z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (2, 1, 0)$ e $u_2 = (-3, 0, 1)$, quindi $V_{-1} = [(2, 1, 0), (-3, 0, 1)]$

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 0$.

Utilizzando la matrice $A_f - 0I = A_f$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 0$, si ha:

$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x + y - 3z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$V_0 = \{(x, x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 1, 0)$, quindi $V_0 = [(1, 1, 0)]$ .

La matrice che diagonalizza la $A_f$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $P$ si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_f P = D$ dove $D$=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, -1) \qquad r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare che le rette $r$ e $s$ sono complanari e determinare il piano $\alpha$ che le contiene.

(ii) Determinare una retta per $P$ complanare con $r$ e $s$.

(iii) Determinare la distanza del punto $P$ dalla retta $s$.

(iv) Determinare il piano $\beta$ per $P$ e ortogonale a $r$.

(i) Sostituendo le componenti di $s$ nell'equazione che definiscono $r$ si ha: $\begin{cases} -1 - t - t = 0 \\ -1 - t + 2t + 1 + t = -1 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, il punto comune alle due rette si ottiene ponendo in $s$ il valore $t = -\dfrac{1}{2}$ : $Q \equiv \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. La direzione di $r$ si ottiene calcolando il determinate dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 3$, dunque $\overrightarrow{r} = (1, 1, 3)$.

La direzione di $s$ è $\overrightarrow{s} = (1, -1, 1)$, l'equazione del piano cercato è: $\begin{vmatrix} x + \dfrac{1}{2} & y + \dfrac{1}{2} & z + \dfrac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, quindi $\alpha : 2x + y - z = -1$.

(ii)
Fascio di piani che contiene $r$ e passa per $P$ : $\lambda(x - y) + \mu(x + 2y - z + 1) = 0$ , imponiamo il passaggio per $P$, si ha: $0\lambda + 4\mu = 0$.
Per $\lambda = 1$ e $\mu = 0$ si ottiene il piano cercato: $\pi_1 : x - y = 0$.

Un'equazione cartesiana di $s$ : $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ .
Fascio di piani che contiene $s$ e passa per $P$ : $\lambda(x + y + 1) + \mu(x - z) = 0$ , imponiamo il passaggio per $P$, si ha: $3\lambda + 2\mu = 0$.
Per $\lambda = -2$ e $\mu = 3$ si ottiene il piano cercato: $\pi_2 : x - 2y - 3z = 2$.

La retta cercata è intersezione di quest'ultimi due piani: $l$ : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y - 3z = 2 \end{cases}$ .

(iii) Piano per $P$ e ortogonale a $s$ : $1(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z + 1) = 0$; $x - y + z = -1$, intersechiamo tale piano con la retta $s$, si trova:

$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -1 - t \\ x - y + z = -1 \end{cases}$ , $-1 - t - t - 1 - t = -1 \iff t = -\dfrac{1}{3}$, il punto di intersezione ha coordinate $R \equiv \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

La distanza cercata è la lunghezza del segmento $\overline{PQ} = \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3} + 1\right)^2} = \sqrt{\dfrac{25}{9} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$.

(iv) La direzione di $\overrightarrow{r} = (1, 1, 3)$, $1(x - 1) + 1(y - 1) + 3(z + 1) = 0$

$\beta : x + y + 3z = -1$.