Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 14 Giugno 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = [(1,0,-1,0),(1,1,-1,0),(0,1,0,0)] \qquad K_h = \{(x,y,z,t) \mid 2x - y + z + (h+1)t = 0,\ hx + y = 0\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di K_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K_{-1}$.
(iii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $K_h^{\perp}$.
(iv) Scrivere una base di $L(H)$, completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$ e ortonormalizzarla.

(i) Per determinare una base di K_h dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x - y + z + (h+1)t = 0 \\ hx + y = 0 \end{cases}$, si scrive la matrice

$M_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & h+1 \\ h & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e si osserva che una tale matrice ha rango 2 $\forall h \in \mathbb{R}$ in quanto la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinnate -1. Possiamo concludere che il sistema lineare ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Un sistema equivalenete è il seguente: $\begin{cases} -y + z = -2x - (h+1)t \\ y = -hx \end{cases}$, con x, t variabili libere. Applicando la regola di Cramer si trova:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2x - (h+1)t & 1 \\ -hx & 0 \end{vmatrix}}{-1} = -hx; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2x - (h+1)t \\ 1 & -hx \end{vmatrix}}{-1} = -(h+2)x - (h+1)t$$

Concludendo le soluzioni del sistema lineare sono $S_h = \{(x, -hx, -(h+2)x - (h+1)t, t) \text{ con } x, t \in \mathbb{R}\}$. La dimensione di K_h al variare di $h \in \mathbb{R}$ è 2 e una sua base è la seguente: $B_h = [(1, -h, -h-2, 0), (0, 0, -h-1, 1)]$.

(ii) Per determinare una rappresentazione cartesiana di $L(H)$ osserviamo se H è libero, si trova che il terzo vettore è uguale al primo meno il secondo, H è legato. Dal sistema H è possibile estrarre il sistema libero $[(1,0,-1,0),(0,1,0,0)]$, utilizzando un tale sistema si scrive una rappresentazione cartesiana:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$, dobbiamo imporre $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$, possiamo scrivere una rappresentazione cartesiana per $L(H) = \{(x,y,z,t) \mid x + z = 0, t = 0\}$.

Osserviamo che $K_{-1} = \{(x,y,z,t) \mid 2x - y + z = 0, x - y = 0\}$, a questo punto $L(H) \cap K_{-1}$ si trova in corrispondenza del sistema lineare:

$\begin{cases} x + z = 0 \\ t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, la matrice dl sistema è la seguente: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il suo rango è 3 in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, il sistema lineare ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni, un generatore del sottospazio vettoriale di dimensione 1 si trova calcolando il determinante delle sottomatrici di ordine 3 estratte dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (determinante a segno alterno)

$u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1,-1,1,0).$ In conclusione la dimensione di $L(H) \cap K_{-1}$ è 1 e una sua base è $T = [(1,1,-1,0)]$.

(iii) Osserviamo che una base di $K_h^{\perp}$ è data dal sistema $S = [(2,-1,1,h+1), (h,1,0,0)]$ (sono i coefficienti di x, y, z, t delle equazioni che definiscono K_h). Costruiamo la matrice: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & h+1 \\ h & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si trova che il determinante di tale matrice vale $-h^2 - h$. Possiamo concludere che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $K_h^{\perp}$ per $h \neq 0, -1$.

(iv) Dobbiamo estendere una base di $L(H)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$, scriviamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e a seguire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, una base di $\mathbb{R}^4$ estesa è la seguente: $B = [(1,0,-1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)]$, osserviamo che gli ultimi tre vettori sono ortogonali, non resta che rendere ortogonale a questi anche il vettore $(1,0,-1,0)$:

$u_1 = (0,1,0,0)$, $u_2 = (1,0,0,0)$, $u_3 = (0,0,0,1)$

$u_4 = (1,0,-1,0) - \frac{(1,0,-1,0) \cdot (0,1,0,0)}{(0,1,0,0) \cdot (0,1,0,0)} (0,1,0,0) - \frac{(1,0,-1,0) \cdot (1,0,0,0)}{(1,0,0,0) \cdot (1,0,0,0)} (1,0,0,0) - \frac{(1,0,-1,0) \cdot (0,0,0,1)}{(0,0,0,1) \cdot (0,0,0,1)} (0,0,0,1) =$

$= (1,0,-1,0) - (1,0,0,0) = (0,0,-1,0)$. In definitiva una base orgonale e anche normalizzata è la seguente: $\overline{B} = [(0,0,-1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0)]$.

2. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 2 & h-1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di M_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice ammette inversa.
(iii) Determinare l'elemento di posto $(2,1)$ della matrice inversa di M_h per $h = 0$.

(i) Applicando Laplace alla prima colonna si trova $|M_h| = \begin{vmatrix} 0 & h-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 2 & h-1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -h^2 - h + 2.$

$h^2 + h - 2 = 0 \iff h = -2$ o $h = 1$. Dunque per $h \neq -2$ o $h \neq 1$ il rango di M_h è 4. Vediamo i casi particolari:

$\underline{h = -2}$

$M_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, si trova che il rango è 3.

$\underline{h=1}$

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, si trova che il rango è 3.

(ii) La matrice M_h è invertibile $\forall h \neq -2, 1$.

(iii) Per calcolare l'elemento di posto $(2,1)$ della matrice M_0^{-1} non è necessario calcolare l'inversa di M_0. E' sufficiente riflettere su come si calcola l'inversa di una matrice, bisogna calcolare soltanto il cofattore $M_{0_{12}} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ e dividere tale quantità per il determinante della matrice M_0 che è uguale a 2 (ricordare che l'inversa si ottiene facendo la trasposta della matrice dei cofattori e dividendo ciascun termine per il determinante). In conclusione possiamo dire che l'elemento di posto $(2,1)$ della matrice M_0^{-1} è $-\dfrac{1}{2}$.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad &= \quad (a+d)x^2 + (a+b+c)x + c - d \end{aligned}$$

(i) Dire se una tale applicazione lineare è suriettiva.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{er} f$.

(i) Utilizzando la nozione di isomorfismo possiamo scrivere la seguente applicazione:

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$F(a, b, c, d) = (a + d, a + b + c, c - d)$

Calcoliamo la matrice A_F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, si trova $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Si trova facilmente che una tale matrice ha rango 3 (le prime tre colonne sono linearmente indipendenti), dunque F è suriettiva. Trasportando tale risultato, mediante l'isomorfismo, possiamo dire che f è suriettiva e una base di $\mathrm{Im}\, f$ è $[x^2 + x, x, x + 1]$.

(ii) Se $\mathrm{Im}\, F$ ha dimensione 3, allora per l'equazione dimensionale $KerF$ deve avere dimensione 1. In corrsipondenza del sistema lineare:

$\begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c - d = 0 \end{cases}$, come al solito la matrice del sistema lineare è $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e la base si trova: $u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$ $(1, 0, -1, -1)$. In forma compatta $u = (1, 0, -1, -1)$.

Dunque $K\,\mathrm{er} f$ ha dimensione 1 è una base è data dal vettore $x^3 - x - 1$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) \quad &= \quad (-x + y + 3z, -2x + 2y + 3z, z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

La matrice A_f è la seguente: $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determiniamo il polinomio caratteristico ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ -2 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(2-\lambda)+2\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2-\lambda\right]$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 3I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, si ha:

$$A_f - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{-2x + y + 3z = 0$$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\{y = 2x - 3z$

$V_1 = \{(x, 2x - 3z, z)$ con $x, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1, 2, 0)$ e $u_2 = (0, -3, 1)$, quindi $V_1 = [(1, 2, 0), (0, -3, 1)]$

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 0$.

Utilizzando la matrice $A_f - 0I = A_f$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 0$, si ha:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$V_0 = \{(x, x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 1, 0)$, quindi $V_0 = [(1, 1, 0)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_f P = D$ dove $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, -1) \qquad r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare che le rette r e s sono complanari e determinare il piano α che le contiene.

(ii) Determinare una retta per P complanare con r e s.

(iii) Determinare la distanza del punto P dalla retta s.
(iv) Determinare il piano β per P e ortogonale a r.

(i) Sostituendo le componenti di s nell'equazione che definiscono r si ha: $\begin{cases} 1+t+1+t=1 \\ 1+t-2-2t-t=0 \end{cases} \Longrightarrow$ $\begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$, il punto comune alle due rette si ottiene ponendo in s il valore $t=-\frac{1}{2}$: $Q \equiv \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. La direzione di r si ottiene calcolando il determinate dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = -3$, dunque $\overrightarrow{r} = (1,-1,-3)$.

La direzione di s è $\overrightarrow{s} = (1,1,-1)$, l'equazione del piano cercato è: $\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} & z-\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, quindi $\alpha : 2x-y+z=1$.

(ii)
Fascio di piani che contiene r e passa per $P : \lambda(x+y-1)+\mu(x-2y+z)=0$, imponiamo il passaggio per P, si ha: $\lambda - 2\mu = 0$.
Per $\lambda = 2$ e $\mu = 1$ si ottiene il piano cercato: $\pi_1 : 3x+z=2$.

Un'equazione cartesiana di $s : \begin{cases} x-y=0 \\ y+z=1 \end{cases}$.
Fascio di piani che contiene s e passa per $P : \lambda(x-y)+\mu(y+z-1)=0$, imponiamo il passaggio per P, si ha: $0\lambda - \mu = 0$.
Per $\lambda = 1$ e $\mu = 0$ si ottiene il piano cercato: $\pi_2 : x-y=0$.

La retta cercata è intersezione di quest'ultimi due piani: $l : \begin{cases} 3x+z=2 \\ x-y=0 \end{cases}$.

(iii) Piano per P e ortogonale a $s : 1(x-1)+1(y-1)-1(z+1)=0$; $x+y-z=3$, intersechiamo tale piano con la retta s, si trova:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-t \\ x+y-z=3 \end{cases}, 3t+2=3 \Longleftrightarrow t=\frac{1}{3}, \text{ il punto di intersezione ha coordinate } R \equiv \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

La distanza cercata è la lunghezza del segmento $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(iv) La direzione di $\overrightarrow{r} = (1,-1,-3)$, $1(x-1)-1(y-1)-3(z+1)=0$

$\beta : x-y-3z=3$.