

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 25 Novembre 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(t, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, -1)]$$

$$K = \{(x, -x, z) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W_t = [(1, t - 1, 0)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

- (i) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ il sistema S_t è legato e per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(S_t)$.
- (ii) Determinare una base e la dimensione di $L(S_t) \cap K$ quando il sistema S_t è legato.
- (iii) Dire per quali valori $t \in \mathbb{R}$ risulta $L(W_t)^\perp = K$? Giustificare tutte le risposte.

- 2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ (2 - k)x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- (i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- 3. Assegnato lo spazio vettoriale canonico \mathbb{R}^3 , costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

- (a) Il vettore $v = (1, -1, 0)$ è un autovettore di autovalore $\lambda = -1$.

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (x, 2x + 2y - z, z)$$

- (i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori.

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, 0, 1)$$

$$r : \begin{cases} x + y = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad \pi : z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

- (i) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano α che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s . Calcolare $d(r, s)$.
- (ii) Determinare la retta l per P ortogonale a r e complanare con s .