

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 23 Marzo 2015

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^\perp = L[(1, 1, 0)] \quad K = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

- (i) Determinare una rappresentazione cartesiana di H .
- (ii) Determinare una base di K e una base di $H \cap K$.
- (iii) Ortonormalizzare una base di H .

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \\ y - kz = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

- (i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rispetto alle basi $B = ((1, 1), (0, 1))$ e $B' = ((0, 1), (1, 0))$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base di $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
- (ii) Determinare $f^{-1}(0, 0, 0)$ (controimmagine del vettore nullo).

4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (-2x - 2y, -x - y, -z)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

- (i) Provare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente a r e s . Calcolare $d(r, s)$.
- (ii) Determinare la retta l per P incidente e ortogonale a r .
- (iii) Determinare il piano π per P parallelo a r e s .