Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 14 Giugno 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = [(1,-1,0,0),(1,-1,1,0),(0,0,1,0)] \qquad K_h = \{(x,y,z,t) \mid 2x+y-z+(h-1)t=0,\ hx+y=0\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di K_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K_{-1}$.
(iii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $K_h^{\perp}$.
(iv) Scrivere una base di $L(H)$, completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$ e ortonormalizzarla.

2. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & h+1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di M_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice ammette inversa.
(iii) Determinare l'elemento di posto $(2,4)$ della matrice inversa di M_h per $h = 0$.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^3+bx^2+cx+d) &= (a+d)x^2+(a+b-c)x+c-d \end{aligned}$$

(i) Dire se una tale applicazione lineare è suriettiva.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{er} f$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) &= (-2x+2y-3z, -x+y-3z, -z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,1,-1) \qquad r: \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-z=-1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=-1-t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che le rette r e s sono complanari e determinare il piano α che le contiene.
(ii) Determinare una retta per P complanare con r e s.
(iii) Determinare la distanza del punto P dalla retta s.
(iv) Determinare il piano β per P e ortogonale a r.