Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 14 Giugno 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = [(1,0,-1,0),(1,1,-1,0),(0,1,0,0)] \qquad K_h = \{(x,y,z,t) \mid 2x - y + z + (h+1)t = 0,\ hx + y = 0\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di K_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $L(H) \cap K_{-1}$.
(iii) Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $L(H)$ e $K_h^\perp$.
(iv) Scrivere una base di $L(H)$, completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$ e ortonormalizzarla.

2. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 2 & h-1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di M_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice ammette inversa.
(iii) Determinare l'elemento di posto $(2,1)$ della matrice inversa di M_h per $h = 0$.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad &= \quad (a+d)x^2 + (a+b+c)x + c - d \end{aligned}$$

(i) Dire se una tale applicazione lineare è suriettiva.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{er}f$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (-x + y + 3z, -2x + 2y + 3z, z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,1,-1) \qquad r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che le rette r e s sono complanari e determinare il piano α che le contiene.
(ii) Determinare una retta per P complanare con r e s.
(iii) Determinare la distanza del punto P dalla retta s.
(iv) Determinare il piano β per P e ortogonale a r.