Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 5 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid y + z = 0, y - z + t = 0\} \qquad K_\lambda = \{(x, y, z, t) \mid \lambda x + y + t = 0, z - \lambda t = 0\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di H.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione parametrica di K_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) Dire per quali valori $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^4 = H \oplus K_\lambda$.
(iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori di una base di H.

(i) Osserviamo che $H^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid y + z = 0, y - z + t = 0\} = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t)(0, 1, 1, 0) = 0, (x, y, z, t)(0, 1, -1, 1) = 0\}$. Tenendo conto della relazione $\left(H^{\perp}\right)^{\perp} = H$ possiamo anche dire che $H = L[(0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 1)]$ e quindi il sistema $S = [(0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 1)]$ è una base di H e $\dim H = 2$.

(ii) In questo caso bisogna risolvere il sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} \lambda x + y + t = 0 \\ z - \lambda t = 0 \end{cases}$, la matrice del sistema è $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ e una tale matrice ha rango 2 al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante 1 qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Possiamo scrivere il sistema nel seguente modo: $\begin{cases} y = -\lambda x - t \\ z = \lambda t \end{cases}$, le soluzioni al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ sono $S_\lambda = \{(x, -\lambda x - t, \lambda t, t) \text{ con } x, t \in \mathbb{R}\}$.

Una base è data dal sistema $T = [(1, -\lambda, 0, 0), (0, -1, \lambda, 1)]$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, una rappresentazione parametrica di K_λ si ottiene al solito modo:

$K_\lambda = \{\alpha(1, -\lambda, 0, 0) + \beta(0, -1, \lambda, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = (\alpha, -\alpha\lambda, 0, 0) + (0, -\beta, \beta\lambda, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = (\alpha, -\alpha\lambda - \beta, \beta\lambda, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. In forma compatta si ha: $K_\lambda = (\alpha, -\alpha\lambda - \beta, \beta\lambda, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(iii) Sappiamo che H ha dimensione 2 e una sua base è data dal sistema $S = [(0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 1)]$, una base di K_λ è data dal sistema $T = [(1, -\lambda, 0, 0), (0, -1, \lambda, 1)]$, affinchè $\mathbb{R}^4$ sia somma diretta di H e K_λ deve accadere che la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ abbia determinante non nullo. Applicando Laplace alla prima colonna si trova facilmente che $|M| = -\lambda - 3$, dunque se $\lambda \neq -3$ allora $\mathbb{R}^4 = H \oplus K_\lambda$.

(iv) Ovvio che tale risultato dipende dalla base scelta per H, se prendiamo $S = [(0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 1)]$ si ha: $\cos\theta = \dfrac{(0, 1, 1, 0) \cdot (0, 1, -1, 1)}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{0}{\sqrt{6}} = 0$, in conclusione se $\cos\theta = 0$ si ottiene $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - kz = 0 \\ x - y - z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare parametrico non omogeneo di 4 equazioni in 3 variabili. Ricordate che tali sistemi lineari meritano un'attenzione particolare (sono sistemi lineari di $n+1$ equazioni lineari in n variabili). Se la matrice completa ha rango 4, il sistema lineare è incompatibile. Scriviamo la matrice completa del sistema lineare:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, utilizzando la regola di Laplace possiamo calcolare il suo determinante secondo la quarta colonna e successivamente Sarrus: $|M| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2k-2$. Ovvio che se $k \neq 1$ il rango della matrice completa è 4 e quello della matrice incompleta è al più 4. Per il teorema di Rouchè-Capelli possiamo concludere che il sistema lineare è incompatibile, dunque se $k \neq 1 \Longrightarrow S_k = \varnothing$.

Se $k = 1$ la matrice del sistema lineare diventa: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, applicando Gauss-Jordan si ha: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il sistema lineare equivalente diventa:

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$. Possiamo concludere che $S_1 = \{(1,0,1)\}$.

3. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle base $B = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e $K\mathrm{er} f$.
(ii) Determinare $f(1,1,1)$.

(i) Studiando la matrice A_f in relazione al suo rango e al sistema omogeneo ad essa associato è possibile avere informazioni sull'immagine e sul nucleo dell'applicazione lineare.

E' possibile dare una risposta ai quesiti costruendo la legge dell'applicazione lineare. Tale costruzione si basa sul ruolo che rivestono le colonne della matrice A_f rispetto alla base assegnata, a tal proposito si possono eseguire gli stessi passaggi proposti nella soluzione del 26 Giugno 2102. Questa volta vogliamo dedurre le risposte tenendo in considerazione la matrice A_f in relazione alla base assegnata

Le colonne della matrice A_f sono le componenti rispetto alla base assegnata di un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$. Si osserva facilmente che la matrice A_f ha determinante nullo, le prime due colonne sono indipendenti e quindi possiamo affermare che i vettori:

$(-1,1,1) = 1 \cdot (0,1,0) - 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1)$
e
$(1,0,1) = 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1)$

sono una base di $\operatorname{Im} f$.

Possiamo concludere che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e $S = [(-1,1,1),(1,0,1)]$ è una base.

Per studiare il $K\operatorname{erf}$ dobbiamo considerare il sistema lineare omogeneo avente per matrice dei coefficienti $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Osserviamo che tale matrice ha determinante nullo e il suo rango è 2. Prendiamo in considerazione la prima e ultima riga:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, siamo in presenza di un sistema lineare omogeneo con 2 equazioni in 3 variabili e il rango della matrice è 2.

Come al solito una base è data dal vettore: $u = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 1)$.

Ricordiamo che quest'ultimo vettore trovato rappresenta le componenti nella base $B = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$ del vettore che genera $K\operatorname{erf}$.

Il vettore che genera il nucleo è: $1(0,1,0) - 1(1,0,0) + 1(0,0,1) = (-1,1,1)$.
Possiamo concludere che $K\operatorname{erf} = L[(-1,1,1)]$.

(ii) Interpretando il ruolo di A_f rispetto alla base B, si ha:
$f(0,1,0) = 1 \cdot (0,1,0) - 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1) = (-1,1,1)$
$f(1,0,0) = 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1) = (1,0,1)$
$f(0,0,1) = -1 \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1) = (2,-1,0)$

Osserviamo che $f(1,1,1) = f[(0,1,0) + (1,0,0) + (0,0,1)] = f(0,1,0) + f(1,0,0) + f(0,0,1) = (-1,1,1) + (1,0,1) + (2,-1,0) = (2,0,2)$. In forma compatta $f(1,1,1) = (2,0,2)$.

SVILUPPO ANCHE LA PARTE CHE AVEVO CONSIGLIATO DI GUARDARE NELLA PROVA DEL 26 GIUGNO 2012.

Noi sappiamo che le colonne della matrice A_f sono le componenti nella base ordinata B dei trasformati mediante f dei vettori della medesima base.
$f(0,1,0) = 1 \cdot (0,1,0) - 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1) = (-1,1,1)$
$f(1,0,0) = 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1) = (1,0,1)$
$f(0,0,1) = -1 \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1) = (2,-1,0)$

Già queste informazioni ci permettono di affermare che il sistema $S = [(-1,1,1),(1,0,1),(2,-1,0)]$ è un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$. Ricordate che esistono proposizioni a riguardo che affermano le seguenti cose:

(a) Un'applicazione lineare è univocamente determinata quando si fissano le assegnazioni sui vettori di una base ordinata. Osserviamo che $B = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$ è una base ordinata.

(b) Le immagini di un sistema di generatori dello spazio vettoriale dominio, in questo caso $\mathbb{R}^3$, costituisce un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

Dunque $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e il sistema $H = [(-1,1,1),(1,0,1)]$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

Ora il generico vettore (x,y,z) si può scrivere come combinazione lineare dei vettori della base nel seguente modo: $(x,y,z) = y(0,1,0) + x(1,0,0) + z(0,0,1)$, sfruttando la linearità di f si ottiene:

$f(x,y,z) = f[y(0,1,0) + x(1,0,0) + z(0,0,1)] = yf(0,1,0) + xf(1,0,0) + zf(0,0,1) = y(-1,1,1) + x(1,0,1) + z(2,-1,0) =$
$= (-y,y,y) + (x,0,x) + (2z,-z,0) = (x - y + 2z, y - z, x + y)$.

In forma più compatta $f(x,y,z)=(x-y+2z,y-z,x+y)$.

Il nucleo dell'applicazione lineare si ottiene risolvendo il sistema omogeneo: $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$. La matrice del sistema $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo e il sistema equivalente è quello in relazione alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Una base di $K\operatorname{erf}$ è data dal vettore:

$u=\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)=(1,-1,-1)$, dunque $K\operatorname{erf}=\{(\alpha,-\alpha,-\alpha), \text{con } \alpha\in\mathbb{R}\}$.
Una base di $K\operatorname{erf}$ è data dal sistema $K=[(1,-1,-1)]$ e $\dim K\operatorname{erf}=1$.

(ii) Ovvio che avendo a disposizione la legge che definisce l'applicazione lineare $f(x,y,z)=(x-y+2z,y-z,x+y)$ otteniamo $f(1,1,1)=(2,0,2)$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x,y,z,t) \quad &= \quad (x,-x+2y+2t,x-y+z-2t,x-y-t) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.
(ii) Determinare il sottospazio vettoriale $K\operatorname{erf}$.

(i) La matrice A_f rispetto alla base canonica è la seguente: $A_f=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f-\lambda I=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} p(\lambda) \quad &= \quad |A_f-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}= \\ (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad &= \quad (1-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}= \\ (1-\lambda)(1-\lambda)[(2-\lambda)(-1-\lambda)+2] \quad &= \quad (1-\lambda)(1-\lambda)[\lambda^2-\lambda]=\lambda(\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ e $\lambda_4=0$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.
Utilizzando la matrice $A_f-\lambda I=A_f-I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, si ha:

$$A_f - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{x - y - 2t = 0 \text{ . L'autospazio } V_1 = \{(y+2t, y, z, t) \text{ con } y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,1,0,0)$ e $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (2,0,0,1)$ quindi $V_1 = L\left[(1,1,0,0),(0,0,1,0),(2,0,0,1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_4 = 0$. Utilizzando la matrice $A_f - 0I = A_f$ scriviamo il sistema omogeneo:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ il rango di tale matrice è 3 e le prime tre righe sono linearmente indipendenti.

L'autospazio di dimensione 1 ha come base il vettore

$$u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (0, 2, -2, -2) \sim (0, 1, -1, -1)$$

$V_0 = \{(0, z, -z, -z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_4 = (0, 1, -1, -1)$, quindi $V_0 = L\left[(0,1,-1,-1)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1} A_f P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori è la seguente $S = [(1,1,0,0),(0,0,1,0),(2,0,0,1),(0,1,-1,-1)]$.

(iii) Per rispondere a tale punto è sufficiente osservare che l'endomorfismo ammette l'autovalore $\lambda_4 = 0$, sappiamo che i vettori di autovalore nullo sono tutti e soli quelli del nucleo, dunque $K\text{erf} = V_0 = L\left[(0,1,-1,-1)\right]$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 2, -1) \qquad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \pi : x + y - z = -1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano α che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s. Determinare la distanza tra le due rette.

(ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta t passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s.

(iii) Determinare il piano β per P ortogonale a π e parallelo a r.

(i) La direzione di r è data (λ, μ, ν) con $\lambda = -1$, $\mu' = -1$, $\nu' = -1$, in altri termini i parametri direttori di r sono $(1, 1, 1)$. La direzione di s si ottiene calcolando il determinate dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$, $\mu = 3$, $\nu = 3$.

La direzione di s è $\lambda' = 1$, $\mu' = 1$, $\nu' = 1$. Possiamo concludere che r e s hanno la stessa direzione. Osserviamo che il punto $Q \equiv (1, 1, 0)$ è un punto di r che non appartiene a s e quindi le rette sono parallele e distinte,

esse sono complanari. Vogliamo determinare il piano che contiene le due rette, prendiamo un punto qualsiasi di s, ad esempio il punto $R \equiv (1, 0, 0)$ e calcoliamo la direzione del vettore $\overrightarrow{RQ} = (0, 1, 0)$.

Il piano α deve contenere le direzioni di r o s e la direzione di $\overrightarrow{RQ} = (0, 1, 0)$ e passare per un punto di r o s :

$$\begin{aligned} \alpha \quad &: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \alpha \quad &: \quad x - z = 1 \end{aligned}$$

Per calcolare la distanza delle due rette calcoleremo il piano ω per s e ortogonale ad α e poi distanza di un qualsiasi punto di r dal piano ω.

Il piano ω per s e ortogoale ad α deve contenere la direzione di s, la direzione ortogonale ad α e un qualsiasi punto di s ad esempio $R \equiv (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \omega \quad &: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \omega \quad &: \quad x - 2y + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Prendiamo unpunto qualsiasi di r, ad esempio $Q \equiv (1, 1, 0)$. Distanza punto piano:

$$d(r, s) = d(P, \omega) = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ in forma compatta } d(r, s) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(ii) La retta cercata è intersezione di due piani

si deve trovare contemporaneamente in un piano per l'origine parallelo a π e un tale piano ha equazione:

$$\delta_1 : x + y - z = 0$$

e in un piano per l'origine perpendicolare a s :

$$\delta_2 : x + y + z = 0$$

Un'equazione della retta cercata è la seguente: $t : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

(iii) Il piano cercato per essere ortogonale a π deve contenere la direzione normale a π e quindi la direzione $\overrightarrow{\pi_n} = (1, 1, -1)$, per essere parallelo alla retta r deve contenere la direzione di r e quindi $\overrightarrow{r} = (1, 1, 1)$.

Un'equazione del piano β è la seguente:

$$\begin{aligned} \beta \quad &: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \beta \quad &: \quad x - y = -1 \end{aligned}$$