Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 5 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^\perp = \{(x,y,z,t) \mid y+z=0, y-z+t=0\} \qquad K_\lambda = \{(x,y,z,t) \mid \lambda x + y + t = 0, z - \lambda t = 0\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di H.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione parametrica di K_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) Dire per quali valori $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^4 = H \oplus K_\lambda$.
(iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori di una base di H.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-kz=0 \\ x-y-z=0 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle base $B = ((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}\, f$ e $K\mathrm{er} f$.
(ii) Determinare $f(1,1,1)$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x,y,z,t) \quad &= \quad (x, -x+2y+2t, x-y+z-2t, x-y-t) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.
(ii) Determinare il sottospazio vettoriale $K\mathrm{er} f$?

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,2,-1) \qquad r : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x-y-z=2 \\ x+y-2z=1 \end{cases} \qquad \pi : x+y-z=-1$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano α che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s. Determinare la distanza tra le due rette.
(ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta t passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s.
(iii) Determinare il piano β per P ortogonale a π e parallelo a r.