Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 30 Gennaio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$M = [(1,0,0,1),(0,0,-1,-1),(1,0,-1,0),(1,0,-2,-1)] \qquad N_s^{\perp} = \{(-sy, y, z, t) \mid \ y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di $L(M)$ e una sua base T.
(ii) Al variare di $s \in \mathbb{R}$ determinare una base K di $L(M) \cap N_s^{\perp}$.
(iii) Dire per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(L(M) + N_s) = 2$. (Giustificare la risposta).

(i) Il sistema M è linearmente dipendente in quanto il terzo vettore è somma dei primi due e il quarto vettore è somma del secondo e terzo. E' possibile provarlo determinando il rango della matrice 4×4 che si costruisce con i vettori. Osserviamo che una base di $L(M)$ è data dal sistema
$T = [(1,0,0,1),(0,0,-1,-1)]$, dunque $\dim L(M) = 2$ e una sua rappresentazione cartesiana si ottiene scrivendo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ e imponendo le due condizioni: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ y & z & t \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ x & z & t \end{vmatrix} = 0$ (sono gli orlati della sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ di rango 2) . In forma compatta si ottiene $L(M) = \{(x, y, z, t) \mid \ y = 0, \ x + z - t = 0\}$.

(ii) In primo luogo determiniamo una rappresentazione cartesiana di $N_s^{\perp}$ (osserviamo che $N_s^{\perp}$ è scritto in forma parametrica) :

$N_s^{\perp} = L[(-s,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$, tali vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice $\begin{pmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3,una rappresentazione cartesiana si ottiene dalla condizione $\begin{vmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0,$
applicando Laplace esce la relazione $sx - t = 0$.
$N_s^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid \ x + sy = 0\}$. Per determinare una base di $L(M) \cap N_s^{\perp}$ bisogna risolvere il sistema parametrico:

$\begin{cases} y = 0 \\ x + z - t = 0 \\ x + sy = 0 \end{cases}$, scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & s & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si osserva che una tale matrice ha rango 3 (ricordiamo di essere in presenza di un sistema omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con rango della matrice 3):

$u = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & s & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & s & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, -1, -1)$. In conclusione una base di $L(M) \cap N_s^{\perp}$ è data dal sistema $K = [(0, 0, -1, -1)]$.

(iii) Osserviamo in primo luogo che $N_s = L[(1, s, 0, 0)]$, la dimensione di $L(M)$ è 2 e la dimensione di N_s è 1.

La dimensione di $(L(M) + N_s)$ è data dal rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & s & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il rango dell'ultima matrice è 3 $\forall s \in \mathbb{R}$ e $\dim(L(M) + N_s) = 3$. La risposta alla domanda è per nessun $s \in \mathbb{R}$.

2. Sia assegnata la seguente matrice parametrica:

$$A_r = \begin{pmatrix} r & 1 & r-1 & r+1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $r \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $A_r^T X = B$.

(i) Osservate che $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r-1 & 1 & 0 \\ r+1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e il quesito pone la ricerca delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} rx + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ (r-1)x + y = 0 \\ (r+1)x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

La matrice del sistema lineare omogeneo è $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r-1 & 1 & 0 \\ r+1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, non è difficile constatare che tale matrice ha rango 2 in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e gli orlati che si costruiscono a partire da tale sottomatrice hanno determinante nullo.

Il sistema equivalente è il seguente: $\begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e una sua base è data dal sistema $T = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \right] = [(1, 1-r, -1)]$, dunque i vettori cercati sono del tipo $X = \begin{pmatrix} l \\ l(1-r) \\ -l \end{pmatrix}$ al variare di $l \in \mathbb{R}$ (tali vettori non sono altro che i vettori soluzione del sistema lineare omogeneo!!!).

3. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_m \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_m(x, y, z, t) \quad &= \quad ((m-1)x + z + mt, x + (m-1)t, x + y + z + t) \end{aligned}$$

(i) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $\operatorname{Im} f_m$.
(ii) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ $f_m^{-1}(0,0,0)$.
(iii) Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_m è un epimorfismo? (Giustificare la risposta).

(i) Costruiamo la matrice A_f rispetto alle basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

$f(1,0,0,0) = (m-1, 1, 1)$
$f(0,1,0,0) = (0,0,1)$

$f(0,0,1,0) = (1,0,1)$

$f(0,0,0,1) = (m, m-1, 1)$

La matrice A_f è la seguente: $A_f = \begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tale matrice ha rango 3 $\forall m \in \mathbb{R}$ in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo (per arrivare ad una tale conclusione bisogna orlare la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Possiamo concludere che $\dim \operatorname{Im} f_m = 3$ e una sua base è data dal sistema $[(m-1,1,1),(0,0,1),(1,0,1)]$ e questo $\forall m \in \mathbb{R}$.

(i) Trovare la controimmagine del vettore nullo vuol dire determinare il nucleo dell'applicazione lineare, il sistema lineare omogeneo è individuato dalla matrice $A_f = \begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, già sappiamo che tale matrice ha rango 3 $\forall m \in \mathbb{R}$ e quindi $\dim K\operatorname{erf}_m = 1$. IL generatore del nucleo si determina come al solito $u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m-1 & 0 & m \\ 1 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$
$= \left(m-1, (m-1)(m-3), -m^2+3m-1, -1\right)$.
In conclusione $f_m^{-1}(0,0,0) = \{\left(t\,(m-1)\,, t(m-1)(m-3), t\left(-m^2+3m-1\right), -t\right) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$.

(iii) L'applicazione lineare f_m è un epimorfimo $\forall m \in \mathbb{R}$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f_m = 3$ $\forall m \in \mathbb{R}$.

4. La matrice A_f di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base ordinata $B = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la legge $f(x,y,z)$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

(i) Ricordando la costruzione di A_f possiamo scrivere:
$f(0,1,0) = 0(0,1,0) + 0(0,0,1) + 2(1,0,0) = (2,0,0)$
$f(0,0,1) = -1(0,1,0) + 0(0,0,1) + 0(1,0,0) = (-1,-1,-2)$
$f(1,0,0) = -1(0,1,0) - 1(0,0,1) + 1(1,0,0) = (-3,-1,0)$

Ora $(x,y,z) = a(0,1,0) + b(0,0,1) + c(1,0,0) = (c,a,b)$, si deduce che $\begin{cases} a = y \\ b = z \\ c = x \end{cases}$.

$(x,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1) + x(1,0,0)$

$f(x,y,z) = yf(0,1,0) + zf(0,0,1) + xf(1,0,0) = y(2,0,0) + z(-1,-1,-2) + x(-3,-1,0) = (-3x+2y-z, -x-z, -2z)$
In forma compatta:

$$f(x,y,z) = (-3x+2y-z, -x-z, -2z)$$

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2\right)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

$A_f + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{2x - y - z = 0$. L'autospazio $V_{-2} = \{(x, y, 2x - y)$ con $x, y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1, 0, 2)$ e $u_2 = (0, 1, -1)$, quindi $V_{-2} = L\left[(1, 0, 2), (0, 1, -1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = -1$.

$A_f + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$. L'autospazio $V_{-1} = \{(z, 0, z)$ con $z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 0, 1)$, quindi $V_{-1} = L\left[(1, 0, 1)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Una base di autovettori è la seguente: $T = \left[(2, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\right]$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, -1) \qquad r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \qquad \pi : x - y - z + 1 = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare la retta n per P incidente r e s.

(ii) Determinare il piano α che contiene r e ortogonale a π.

(iii) Determinare la retta m per P ortogonale a r e s.

(iv) Calcolare la distanta tra il punto P e la retta r.

(i) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano π_1 che contiene r e passa per P e il piano π_2 che contiene s e passa per P.

Il piano π_1 contiene la direzione di $\overrightarrow{r} = (1, -1, 1)$, la direzione del vettore $\overrightarrow{PQ}$ con Q punto arbitrario di r. Come punto di r possiamo considerare $Q \equiv (0, 0, 1)$. In tal modo si ha $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, -2)$.

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_1 \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_1 \quad : \quad x + y = 0$$

Il piano π_2 contiene la direzione di $\overrightarrow{s} = (-1, 1, 0)$, la direzione del vettore $\overrightarrow{PR}$ con R punto arbitrario di s. Come punto di s possiamo considerare $R \equiv (0, 0, 1)$. In tal modo si ha $\overrightarrow{PR} = (1, -1, -2)$.

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\pi_2 \quad : \quad x + y = 0$$

In questo caso dobbiamo osservare che le rette r e s sono complanari e il punto P appartiene anche a tale piano, di rette per $P \equiv (1, -1, -1)$ e incidenti r e s ce ne sono infinite. Una retta può essere quella per $P \equiv (1, -1, -1)$ e passante per il punto di intersezione di r e s, quest'ultimo punto ha coordinate casualmente $R \equiv (0, 0, 1)$. Osserviamo che $\overrightarrow{PR} = (1, -1, -2)$

La retta $n : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ e in forma cartesiana: $n : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$.

(ii) Il piano cercato deve contenere un punto a piacere di r e come punto prendiamo $Q \equiv (0, 0, 1)$, la direzione di $\overrightarrow{r} = (1, -1, 1)$ e la direzione ortogonale a $\overrightarrow{\pi}^{\perp} = (1, -1, -1)$.

Il p:iano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\alpha \quad : \quad x + y = 0$$

(iii) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano δ_1 per P ortogoale a r e il piano δ_2 per P ortogonale a s.

$\delta_1 : 1(x-1) - 1(y+1) + 1(z+1) = 0$, in forma compatta $\delta_1 : x - y + z = 1$.

$\delta_2 : -1(x-1) + 1(y+1) + 0(z+1) = 0$, in forma compatta $\delta_2 : x - y = 2$.

Una rappresentazione cartesiana della retta è la seguente: $\quad m : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

(iv) Il piano per P ortogonale a r è stato determinato in precedenza $\delta_1 : x - y + z = 1$. Intersechiamo tale piano con la retta r, si trova:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x = t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

La relazione è $t + t + 1 + t = 1 \iff t = 0$

Il punto S di r è $S \equiv (0, 0, 1)$, risulta evidente che $d(P, r) = d(P, S) = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{6}$.