Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 30 Gennaio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$M = [(0,0,1,1), (-1,0,-1,0), (-1,0,0,1), (-2,0,-1,1)] \qquad N_s^{\perp} = \{(x, y, -sy, t) \mid \ x, y, t \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di $L(M)$ e una sua base T.
(ii) Al variare di $s \in \mathbb{R}$ determinare una base K di $L(M) \cap N_s^{\perp}$.
(iii) Dire per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(L(M) + N_s) = 3$. (Giustificare la risposta).

(i) Il sistema M è linearmente dipendente in quanto il terzo vettore è somma dei primi due e il quarto vettore è somma del secondo e terzo. E' possibile provarlo determinando il rango della matrice 4×4 che si costruisce con i vettori. Osserviamo che una base di $L(M)$ è data dal sistema
$T = [(0,0,1,1), (-1,0,-1,0)]$, dunque $\dim L(M) = 2$ e una sua rappresentazione cartesiana si ottiene scrivendo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ e imponendo le due condizioni: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ y & z & t \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ x & z & t \end{vmatrix} = 0$ (sono gli orlati della sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ di rango 2) . In forma compatta si ottiene $L(M) = \{(x, y, z, t) \mid \ y = 0, \ x - z + t = 0\}$.

(ii) In primo luogo determiniamo una rappresentazione cartesiana di $N_s^{\perp}$ (osserviamo che $N_s^{\perp}$ è scritto in forma parametrica) :

$N_s^{\perp} = L[(1,0,0,0), (0,1,-s,0), (0,0,0,1)]$, tali vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3,una rappresentazione cartesiana si ottiene dalla condizione $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0,$ applicando Laplace esce la relazione $sy + z = 0$.
$N_s^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid \ sy + z = 0\}$. Per determinare una base di $L(M) \cap N_s^{\perp}$ bisogna risolvere il sistema parametrico:

$\begin{cases} y = 0 \\ x - z + t = 0 \\ sy + z = 0 \end{cases}$, scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & s & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si osserva che una tale matrice ha rango 3 (ricordiamo di essere in presenza di un sistema omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con rango della matrice 3):

$$u = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ s & 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & s & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 0, 0, 1)$$. In conclusione una base di $L(M) \cap N_s^{\perp}$ è data dal sistema $K = [(-1, 0, 0, 1)]$.

(iii) Osserviamo in primo luogo che $N_s = L[(0, s, 1, 0)]$, la dimensione di $L(M)$ è 2 e la dimensione di N_s è 1.

La dimensione di $(L(M) + N_s)$ è data dal rango della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il rango dell'ultima matrice è 3 $\forall s \in \mathbb{R}$. La risposta alla domanda è $\forall s \in \mathbb{R}$.

2. Sia assegnata la seguente matrice parametrica:

$$A_r = \begin{pmatrix} r & r-1 & r+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $r \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $A_r^T X = B$.

(i) Osservate che $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ r-1 & 1 & 0 \\ r+1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e il quesito pone la ricerca delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} rx + y + z = 0 \\ (r-1)x + y = 0 \\ (r+1)x + y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

La matrice del sistema lineare omogeneo è $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ r-1 & 1 & 0 \\ r+1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, non è difficile constatare che tale matrice ha rango 2 in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e gli orlati che si costruiscono a partire da tale sottomatrice hanno determinante nullo.

Il sistema equivalente è il seguente: $\begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ r-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e una sua base è data dal sistema $T = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} r & 1 \\ r-1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r & 1 \\ r-1 & 1 \end{vmatrix} \right) \right] =$ $[(-1, r-1, 1)]$, dunque i vettori cercati sono del tipo $X = \begin{pmatrix} -l \\ l(r-1) \\ l \end{pmatrix}$ al variare di $l \in \mathbb{R}$ (tali vettori non sono altro che i vettori soluzione del sistema lineare omogeneo!!!).

3. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_m \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_m(x, y, z, t) \quad &= \quad (x + (m-1)t, x + y + z + t, (m-1)x + z + mt) \end{aligned}$$

(i) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $\mathrm{Im}\, f_m$.
(ii) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ $f_m^{-1}(0,0,0)$.
(iii) Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_m è un epimorfismo? (Giustificare la risposta).

(i) Costruiamo la matrice A_f rispetto alle basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

$f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, m-1)$

$f(0,1,0,0) = (0,1,0)$
$f(0,0,1,0) = (0,1,1)$

$f(0,0,0,1) = (m-1,1,m)$

La matrice A_f è la seguente: $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, tale matrice ha rango 3 $\forall m \in \mathbb{R}$ in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo (per arrivare ad una tale conclusione bisogna orlare la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Possiamo concludere che $\dim \operatorname{Im} f_m = 3$ e una sua base è data dal sistema $[(1,1,m-1),(0,1,0),(0,1,1)]$ e questo $\forall m \in \mathbb{R}$.

(i) Trovare la controimmagine del vettore nullo vuol dire determinare il nucleo dell'applicazione lineare, il sistema lineare omogeneo è individuato dalla matrice $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, già sappiamo che tale matrice ha rango 3 $\forall m \in \mathbb{R}$ e quindi $\dim K\operatorname{er} f_m = 1$. IL generatore del nucleo si determina come al solito $u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & m \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) =$
$= \left(m-1, (m-1)(m-3), -m^2+3m-1, -1\right)$.
In conclusione $f_m^{-1}(0,0,0) = \{\left(t\left(m-1\right), t(m-1)(m-3), t\left(-m^2+3m-1\right), -t\right) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$.

(iii) L'applicazione lineare f_m è un epimorfimo $\forall m \in \mathbb{R}$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f_m = 3$ $\forall m \in \mathbb{R}$.

4. La matrice A_f di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base ordinata $B = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la legge $f(x,y,z)$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

(i) Ricordando la costruzione di A_f possiamo scrivere:
$f(0,1,0) = -1(0,1,0) + 1(0,0,1) + 1(1,0,0) = (1,-1,1)$
$f(0,0,1) = 0(0,1,0) + 0(0,0,1) + 1(1,0,0) = (1,0,0)$
$f(1,0,0) = 0(0,1,0) - 2(0,0,1) - 3(1,0,0) = (-3,0,-2)$

Ora $(x,y,z) = a(0,1,0) + b(0,0,1) + c(1,0,0) = (c,a,b)$, si deduce che $\begin{cases} a = y \\ b = z \\ c = x \end{cases}$.

$(x,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1) + x(1,0,0)$

$f(x,y,z) = yf(0,1,0) + zf(0,0,1) + xf(1,0,0) = y(1,-1,1) + z(1,0,0) + x(-3,0,-2) = (-3x+y+z, -y, -2x+y)$
In forma compatta:

$$f(x,y,z) = (-3x+y+z, -y, -2x+y)$$

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2\right)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$A_f + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{x + y - 2z = 0.$ L'autospazio $V_{-1} = \{(-y + 2z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (2, 0, 1)$, quindi $V_{-1} = L\,[(-1, 1, 0), (2, 0, 1)]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = -2$.

$A_f + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. L'autospazio $V_{-2} = \{(0, y, y)$ con $y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0, 1, 1)$, quindi $V_{-2} = L\,[(0, 1, 1)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Una base di autovettori è la seguente: $T = [(0, -1, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 1)]$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, -1) \qquad r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \qquad \pi : x + y + z + 1 = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare la retta n per P incidente r e s.

(ii) Determinare il piano α che contiene r e ortogonale a π.

(iii) Determinare la retta m per P ortogonale a r e s.

(iv) Calcolare la distanta tra il punto P e la retta r.

(i) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano π_1 che contiene r e passa per P e il piano π_2 che contiene s e passa per P.

Il piano π_1 contiene la direzione di $\overrightarrow{r} = (1, 1, -1)$, la direzione del vettore $\overrightarrow{PQ}$ con Q punto arbitrario di r. Come punto di r possiamo considerare $Q \equiv (0, 0, 1)$. In tal modo si ha $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, -2)$.

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_1 \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_1 \quad : \quad x - y = 0$$

Il piano π_2 contiene la direzione di $\overrightarrow{s} = (1,0,-1)$, la direzione del vettore $\overrightarrow{PR}$ con R punto arbitrario di s. Come punto di s possiamo considerare $R \equiv (0,-1,0)$. In tal modo si ha $\overrightarrow{PR} = (1,2,-1)$.

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_2 \quad : \quad x + z = 0$$

In questo caso dobbiamo osservare che tale retta non esiste in quanto il piano π_2 che contiene s e passa per P è parallelo a alla retta r.

(ii) Il piano cercato deve contenere un punto a piacere di r e come punto prendiamo $Q \equiv (0,0,1)$, la direzione di $\overrightarrow{r} = (1,1,-1)$ e la direzione ortogonale a $\overrightarrow{\pi}^{\perp} = (1,1,1)$.

Il p:iano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \quad : \quad x - y = 0$$

(iii) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano δ_1 per P ortogoale a r e il piano δ_2 per P ortogonale a s.

$\delta_1 : 1(x-1) + 1(y-1) - 1(z+1) = 0$, in forma compatta $\delta_1 : x + y - z = 3$.

$\delta_2 : 1(x-1) + 0(y-1) - 1(z+1) = 0$, in forma compatta $\delta_2 : x - z = 2$.

Una rappresentazione cartesiana della retta è la seguente: $\quad m : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - z = 2 \end{cases}$.

(iv) Il piano per P ortogonale a r è stato determinato in precedenza $\delta_1 : x + y - z = 3$. Intersechiamo tale piano con la retta r, si trova:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

La relazione è $t + t - 1 + t = 3 \Longleftrightarrow t = \dfrac{4}{3}$

Il punto S di r è $S \equiv \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, risulta evidente che $d(P,r) = d(P,S) = \sqrt{\left(1 - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 + \dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.