

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 30 Gennaio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$M = [(0, 1, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (0, 0, -1, 1), (0, -1, -2, 1)] \quad N_s^\perp = \{(x, y, -sx, t) \mid x, y, t \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di  $L(M)$  e una sua base  $T$ .

(ii) Al variare di  $s \in \mathbb{R}$  determinare una base  $K$  di  $L(M) \cap N_s^\perp$ .

(iii) Dire per quali valori di  $s \in \mathbb{R}$  risulta  $\dim(L(M) \cap N_s) = 0$ . (Giustificare la risposta).

(i) Il sistema  $M$  è linearmente dipendente in quanto il terzo vettore è somma dei primi due e il quarto vettore è somma del secondo e terzo. E' possibile provarlo determinando il rango della matrice  $4 \times 4$  che si costruisce con i vettori. Osserviamo che una base di  $L(M)$  è data dal sistema

$T = [(0, 1, 0, 1), (0, -1, -1, 0)]$ , dunque  $\dim L(M) = 2$  e una sua rappresentazione cartesiana si ottiene scrivendo la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$  e imponendo le due condizioni:  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ y & z & t \end{vmatrix} = 0$  e

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ x & z & t \end{vmatrix} = 0$  (sono gli orlati della sottomatrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  di rango 2). In forma compatta si ottiene  $L(M) = \{(x, y, z, t) \mid x = 0, y - z - t = 0\}$ .

(ii) In primo luogo determiniamo una rappresentazione cartesiana di  $N_s^\perp$  (osserviamo che  $N_s^\perp$  è scritto in forma parametrica):

$N_s^\perp = L[(1, 0, -s, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$ , tali vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 3, una rappresentazione cartesiana si ottiene dalla condizione  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0$ ,

applicando Laplace esce la relazione  $sx + z = 0$ .

$N_s^\perp = \{(x, y, z, t) \mid sx + z = 0\}$ . Per determinare una base di  $L(M) \cap N_s^\perp$  bisogna risolvere il sistema parametrico:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z - t = 0 \\ sx + z = 0 \end{cases}, \text{ scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ s & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si osserva}$$

che una tale matrice ha rango 3 (ricordiamo di essere in presenza di un sistema omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con rango della matrice 3):

$$u = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ s & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ s & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, -1, 0, -1). \text{ In}$$

conclusione una base di  $L(M) \cap N_s^\perp$  è data dal sistema  $K = [(0, -1, 0, -1)]$ .

(iii) Osserviamo in primo luogo che  $N_s = L[(s, 0, 1, 0)]$ , la dimensione di  $L(M)$  è 2 e la dimensione di  $N_s$  è 1.

La dimensione di  $(L(M) + N_s)$  è data dal rango della matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , il rango dell'ultima matrice è  $3 \forall s \in \mathbb{R}$  e per l'equazione dimensionale risulta  $\dim(L(M) \cap N_s) = 0$ . La risposta alla domanda è  $\forall s \in \mathbb{R}$ .

2. Sia assegnata la seguente matrice parametrica:

$$A_r = \begin{pmatrix} r & r+1 & 1 & r-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di  $r \in \mathbb{R}$  determinare i vettori  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tali che  $A_r^T X = B$ .

(i) Osservate che  $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ r+1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ r-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  e il quesito pone la ricerca delle soluzioni del sistema lineare

$$\text{omogeneo} \begin{cases} rx + y + z = 0 \\ (r+1)x + y + 2z = 0 \\ x + z \\ (r-1)x + y = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema lineare omogeneo è  $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r+1 & 1 & 2 \\ r-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , non è difficile constatare che tale

matrice ha rango 2 in quanto la sottomatrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha determinante non nullo e gli orlati che si costruiscono a partire da tale sottomatrice hanno determinante nullo.

Il sistema equivalente è il seguente:  $\begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e una sua base è data dal sistema  $T = \left[ \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \right] = [(1, 1-r, -1)]$ , dunque i vettori cercati sono del tipo  $X = \begin{pmatrix} l \\ l(1-r) \\ -l \end{pmatrix}$  al variare di  $l \in \mathbb{R}$  (tali vettori non sono altro che i vettori soluzione del sistema lineare omogeneo!!!).

3. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$f_m : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_m(x, y, z, t) = (x + y + z + t, (m-1)x + z + mt, x + (m-1)t)$$

- (i) Determinare al variare di  $m \in \mathbb{R}$  una base e la dimensione di  $\text{Im } f_m$ .
- (ii) Determinare al variare di  $m \in \mathbb{R}$   $f_m^{-1}(0, 0, 0)$ .
- (iii) Per quali valori di  $m \in \mathbb{R}$  l'applicazione lineare  $f_m$  è un epimorfismo? (Giustificare la risposta).

(i) Costruiamo la matrice  $A_f$  rispetto alle basi canoniche rispettivamente di  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{R}^3$ :

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, m-1, 1) \\ f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 0)$$

$$f(0, 0, 0, 1) = (1, m, m - 1)$$

La matrice  $A_f$  è la seguente:  $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ , tale matrice ha rango 3  $\forall m \in \mathbb{R}$  in

quanto la sottomatrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ha determinante non nullo (per arrivare ad una tale conclusione bisogna orlare la sottomatrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ). Possiamo concludere che  $\dim \text{Im } f_m = 3$  e una sua base è data dal sistema  $[(1, m - 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)]$  e questo  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

(i) Trovare la controimmagine del vettore nullo vuol dire determinare il nucleo dell'applicazione lineare, il sistema lineare omogeneo è individuato dalla matrice  $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ , già sappiamo che tale matrice ha rango 3  $\forall m \in \mathbb{R}$  e quindi  $\dim \text{Ker } f_m = 1$ . Il generatore del nucleo si determina come al solito  $u = \left( \begin{array}{c|c|c|c|} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m & \\ 0 & 0 & m-1 & \end{array} \right|, - \left( \begin{array}{c|c|c|} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m-1 \end{array} \right|, \left( \begin{array}{c|c|c|} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & m \\ 1 & 0 & m-1 \end{array} \right|, - \left( \begin{array}{c|c|c|} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \right) =$   
 $= (m - 1, (m - 1)(m - 3), -m^2 + 3m - 1, 1)$ .

In conclusione  $f_m^{-1}(0, 0, 0) = \{t(m - 1), t(m - 1)(m - 3), t(-m^2 + 3m - 1), t\}$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

(iii) L'applicazione lineare  $f_m$  è un epimorfismo  $\forall m \in \mathbb{R}$  in quanto  $\dim \text{Im } f_m = 3 \forall m \in \mathbb{R}$ .

4. La matrice  $A_f$  di un endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  rispetto alla base ordinata  $B = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$  è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la legge  $f(x, y, z)$ .

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di  $f$ , nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_f$  e determinare una base  $B$  di autovettori.

(i) Ricordando la costruzione di  $A_f$  possiamo scrivere:

$$f(0, 1, 0) = 3(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) + 0(1, 0, 0) = (0, 3, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = -2(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) + 0(1, 0, 0) = (0, -2, 0)$$

$$f(1, 0, 0) = 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) + 2(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

Ora  $(x, y, z) = a(0, 1, 0) + b(0, 0, 1) + c(1, 0, 0) = (c, a, b)$ , si deduce che  $\begin{cases} a = y \\ b = z \\ c = x \end{cases}$ .

$$(x, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) + x(1, 0, 0)$$

$$f(x, y, z) = yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) + xf(1, 0, 0) = y(0, 3, 1) + z(0, -2, 0) + x(2, 1, 1) = (2x, x + 3y - 2z, x + y)$$

In forma compatta:

$$f(x, y, z) = (2x, x + 3y - 2z, x + y)$$

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo  $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$ , si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 1$ .

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ .

$$A_f - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \{x - 2y + z = 0\}. \text{ L'autospazio } V_2 = \{(2y - z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$

una sua base è costituita dai vettori:  $u_1 = (2, 1, 0)$  e  $u_2 = (-1, 0, 1)$ , quindi  $V_2 = L[(2, 1, 0), (-1, 0, 1)]$ .

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $\lambda_3 = 1$ .

$$A_f - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \text{ L'autospazio } V_1 = \{(y, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\} \text{ e una sua}$$

base è costituita dal vettore:  $u_3 = (1, 1, 0)$ , quindi  $V_1 = L[(1, 1, 0)]$ .

La matrice che diagonalizza la  $A_f$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Remark 1 OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Gli elementi degli insiemi  $V_\lambda$  che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Una base di autovettori è la seguente:  $T = [(0, 2, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1)]$ .

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, 1) \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \pi : x - y + z + 1 = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

- (i) Determinare la retta  $n$  per  $P$  incidente  $r$  e  $s$ .
- (ii) Determinare il piano  $\alpha$  che contiene  $r$  e ortogonale a  $\pi$ .
- (iii) Determinare la retta  $m$  per  $P$  ortogonale a  $r$  e  $s$ .
- (iv) Calcolare la distanza tra il punto  $P$  e la retta  $r$ .

(i) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano  $\pi_1$  che contiene  $r$  e passa per  $P$  e il piano  $\pi_2$  che contiene  $s$  e passa per  $P$ .

Il piano  $\pi_1$  contiene la direzione di  $\vec{r} = (1, 1, 1)$ , la direzione del vettore  $\overrightarrow{PQ}$  con  $Q$  punto arbitrario di  $r$ . Come punto di  $r$  possiamo considerare  $Q \equiv (0, 0, 1)$ . In tal modo si ha  $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 0)$ .

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_1 : x + y - 2z = -2$$

Il piano  $\pi_2$  contiene la direzione di  $\vec{s} = (1, 0, 1)$ , la direzione del vettore  $\overrightarrow{PR}$  con  $R$  punto arbitrario di  $s$ . Come punto di  $s$  possiamo considerare  $R \equiv (1, 1, 0)$ . In tal modo si ha  $\overrightarrow{PR} = (0, -2, 1)$ .

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y - 2z = 1$$

Una rappresentazione cartesiana della retta è la seguente:

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ 2x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

(ii) Il piano cercato deve contenere un punto a piacere di  $r$  e come punto prendiamo  $Q \equiv (0, 0, 1)$ , la direzione di  $\vec{r} = (1, 1, 1)$  e la direzione ortogonale a  $\vec{r}^\perp = (1, -1, 1)$ .

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha : x - z = -1$$

(iii) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano  $\delta_1$  per  $P$  ortogonale a  $r$  e il piano  $\delta_2$  per  $P$  ortogonale a  $s$ .

$$\delta_1 : 1(x-1) + 1(y+1) + 1(z-1) = 0, \text{ in forma compatta } \delta_1 : x + y + z = 1.$$

$$\delta_2 : 1(x-1) + 0(y+1) + 1(z-1) = 0, \text{ in forma compatta } \delta_2 : x + z = 2.$$

Una rappresentazione cartesiana della retta è la seguente:  $m : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$ .

(iv) Il piano per  $P$  ortogonale a  $r$  è stato determinato in precedenza  $\delta_1 : x + y + z = 1$ . Intersechiamo tale piano con la retta  $r$ , si trova:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

La relazione è  $t + t + 1 - t = 1 \iff t = 0$

Il punto  $S$  di  $r$  è  $S \equiv (0, 0, 1)$ , risulta evidente che  $d(P, r) = d(P, S) = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$ .