Esame di Geometria e Algebra

Matr._________________

Prova scritta 30 Gennaio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$M = [(1,0,0,1), (-1,0,-1,0), (0,0,-1,1), (-1,0,-2,1)] \qquad N_s^{\perp} = \{(x,y,z,sx) \mid \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di $L(M)$ e una sua base T.
(ii) Al variare di $s \in \mathbb{R}$ determinare una base K di $L(M) \cap N_s^{\perp}$.
(iii) Dire per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(L(M) \cap N_s) = 0$. (Giustificare la risposta).

(i) Il sistema M è linearmente dipendente in quanto il terzo vettore è somma dei primi due e il quarto vettore è somma del secondo e terzo. E' possibile provarlo determinando il rango della matrice 4×4 che si costruisce con i vettori. Osserviamo che una base di $L(M)$ è data dal sistema

$T = [(1,0,0,1), (-1,0,-1,0)]$, dunque $\dim L(M) = 2$ e una sua rappresentazione cartesiana si ottiene scrivendo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ e imponendo le due condizioni: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ y & z & t \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ x & z & t \end{vmatrix} = 0$ (sono gli orlati della sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ di rango 2) . In forma compatta si ottiene $L(M) = \{(x,y,z,t) \mid \ y = 0,\ x - z - t = 0\}$.

(ii) In primo luogo determiniamo una rappresentazione cartesiana di $N_s^{\perp}$ (osserviamo che $N_s^{\perp}$ è scritto in forma parametrica) :

$N_s^{\perp} = L[(1,0,0,s), (0,1,0,0), (0,0,1,0)]$, tali vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3,una rappresentazione cartesiana si ottiene dalla condizione $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0$, applicando Laplace esce la relazione $sx - t = 0$.

$N_s^{\perp} = \{(x,y,z,t) \mid \ sx - t = 0\}$. Per determinare una base di $L(M) \cap N_s^{\perp}$ bisogna risolvere il sistema parametrico:

$\begin{cases} y = 0 \\ x - z - t = 0 \\ sx - t = 0 \end{cases}$, scriviamo la matrice del sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ s & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si osserva che una tale matrice ha rango 3 (ricordiamo di essere in presenza di un sistema omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con rango della matrice 3):

$$u = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ s & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ s & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, 1-s, s)$$

. In conclusione una base di $L(M) \cap N_s^{\perp}$ è data dal sistema $K = [(1, 0, 1-s, s)]$.

(iii) Osserviamo in primo luogo che $N_s = L[(s,0,0,-1)]$, la dimensione di $L(M)$ è 2 e la dimensione di N_s è 1.

La dimensione di $(L(M) + N_s)$ è data dal rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ s & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, il rango dell'ultima matrice è 3 solo se $s \neq -1$ e per l'equazione dimensionale risulta $\dim(L(M) \cap N_s) = 0$. La risposta alla domanda è $s \neq -1$.

2. Sia assegnata la seguente matrice parametrica:

$$A_r = \begin{pmatrix} r & 1 & r+1 & r-1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $r \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $A_r^T X = B$.

(i) Osservate che $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r+1 & 1 & 2 \\ r-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e il quesito pone la ricerca delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} rx + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ (r+1)x + y + 2z = 0 \\ (r-1)x + y = 0 \end{cases}$.

La matrice del sistema lineare omogeneo è $A_r^T = \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ r+1 & 1 & 2 \\ r-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, non è difficile constatare che tale matrice ha rango 2 in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e gli orlati che si costruiscono a partire da tale sottomatrice hanno determinante nullo.

Il sistema equivalente è il seguente: $\begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e una sua base è data dal sistema $T = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \right] = [(1, 1-r, -1)]$, dunque i vettori cercati sono del tipo $X = \begin{pmatrix} l \\ l(1-r) \\ -l \end{pmatrix}$ al variare di $l \in \mathbb{R}$ (tali vettori non sono altro che i vettori soluzione del sistema lineare omogeneo!!!).

3. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_m &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_m(x, y, z, t) &= ((m-1)x + z + mt, x + y + z + t, x + (m-1)t) \end{aligned}$$

(i) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $\operatorname{Im} f_m$.
(ii) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ $f_m^{-1}(0,0,0)$.
(iii) Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_m è un epimorfismo? (Giustificare la risposta).

(i) Costruiamo la matrice A_f rispetto alle basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

$f(1,0,0,0) = (m-1, 1, 1)$
$f(0,1,0,0) = (0, 1, 0)$
$f(0,0,1,0) = (1, 1, 0)$

$f(0,0,0,1)=(m,1,m-1)$

La matrice A_f è la seguente: $A_f=\begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$, tale matrice ha rango 3 $\forall m\in\mathbb{R}$ in quanto la sottomatrice $\begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo (per arrivare ad una tale conclusione bisogna orlare la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Possiamo concludere che $\dim \operatorname{Im} f_m=3$ e una sua base è data dal sistema $[(m-1,1,1),(0,1,0),(1,1,0)]$ e questo $\forall m\in\mathbb{R}$.

(i) Trovare la controimmagine del vettore nullo vuol dire determinare il nucleo dell'applicazione lineare, il sistema lineare omogeneo è individuato dalla matrice $A_f=\begin{pmatrix} m-1 & 0 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$, già sappiamo che tale matrice ha rango 3 $\forall m\in\mathbb{R}$ e quindi $\dim K\operatorname{erf}_m=1$. IL generatore del nucleo si determina come al solito $u=$

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m-1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right)=$$

$=\big(1-m,-(m-1)(m-3),m^2-3m+1,1\big)$.

In conclusione $f_m^{-1}(0,0,0)=\{\big(t\,(1-m)\,,-t(m-1)(m-3),t\left(m^2-3m+1\right),t\big)$ con $t\in\mathbb{R}\}$.

(iii) L'applicazione lineare f_m è un epimorfimo $\forall m\in\mathbb{R}$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f_m=3$ $\forall m\in\mathbb{R}$.

4. La matrice A_f di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base ordinata $B=((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ è la seguente:

$$A_f=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la legge $f(x,y,z)$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

(i) Ricordando la costruzione di A_f possiamo scrivere:

$f(0,1,0)=3(0,1,0)+2(0,0,1)+0(1,0,0)=(0,3,2)$

$f(0,0,1)=-1(0,1,0)+0(0,0,1)+0(1,0,0)=(0,-1,0)$

$f(1,0,0)=-1(0,1,0)-1(0,0,1)+1(1,0,0)=(1,-1,-1)$

Ora $(x,y,z)=a(0,1,0)+b(0,0,1)+c(1,0,0)=(c,a,b)$, si deduce che $\begin{cases} a=y \\ b=z \\ c=x \end{cases}$.

$(x,y,z)=y(0,1,0)+z(0,0,1)+x(1,0,0)$

$f(x,y,z)=yf(0,1,0)+zf(0,0,1)+xf(1,0,0)=y(0,3,2)+z(0,-1,0)+x(1,-1,-1)=(x,-x+3y-z,-x+2y)$

In forma compatta:

$$f(x,y,z)=(x,-x+3y-z,-x+2y)$$

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f-\lambda I=\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ 2 & -\lambda & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda)=|A_f-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ 2 & -\lambda & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1=\lambda_2=1$ e $\lambda_3=2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1=\lambda_2=1$.

$A_f-I=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\{2x-y-z=0$. L'autospazio $V_1=\{(x,y,2x-y)$ con $x,y\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1=(1,0,2)$ e $u_2=(0,1,-1)$, quindi $V_1=L\left[(1,0,2),(0,1,-1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3=2$.

$A_f-2I=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x-y-z=0\\ -z=0\end{cases}$. L'autospazio $V_2=\{(y,y,0)$ con $y\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3=(1,1,0)$, quindi $V_2=L\left[(1,1,0)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Una base di autovettori è la seguente: $T=\left[(2,1,0),(-1,0,1),(0,1,1)\right]$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P\equiv(-1,1,1)\qquad r:\begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=1-t\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x+y-z=0\\ y-z=1\end{cases}\qquad \pi: x+y+z+1=0$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare la retta n per P incidente r e s.

(ii) Determinare il piano α che contiene r e ortogonale a π.

(iii) Determinare la retta m per P ortogonale a r e s.

(iv) Calcolare la distanta tra il punto P e la retta r.

La retta cercata è intersezione di due piani, il piano π_1 che contiene r e passa per P e il piano π_2 che contiene s e passa per P.

Il piano π_1 contiene la di rezione di $\overrightarrow{r}=(1,-1,-1)$, la direzione del vettore $\overrightarrow{PQ}$ con Q punto arbitrario di r. Come punto di r possiamo considerare $Q\equiv(0,0,1)$. In tal modo si ha $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)$.

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_1\quad:\quad\begin{vmatrix}x+1 & y-1 & z-1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\pi_1\quad:\quad x+y=0$$

Il piano π_2 contiene la direzione di $\overrightarrow{s} = (0, 1, 1)$, la direzione del vettore $\overrightarrow{PR}$ con R punto arbitrario di s. Come punto di s possiamo considerare $R \equiv (-1, 0, -1)$. In tal modo si ha $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$.

Il piano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\pi_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_2 \quad : \quad x + 1 = 0$$

Una rappresentazione cartesiana della retta è la seguente:

$$n : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

(ii) Il piano cercato deve contenere un punto a piacere di r e come punto prendiamo $Q \equiv (0, 0, 1)$, la direzione di $\overrightarrow{r} = (1, -1, -1)$ e la direzione ortogonale a $\overrightarrow{\pi}^{\perp} = (1, 1, 1)$.

Il p:iano cercato si trova imponendo la seguente condizione:

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \quad : \quad y - z = -1$$

(iii) La retta cercata è intersezione di due piani, il piano δ_1 per P ortogoale a r e il piano δ_2 per P ortogonale a s.

$\delta_1 : 1(x+1) - 1(y-1) - 1(z-1) = 0$, in forma compatta $\delta_1 : x - y - z = -3$.

$\delta_2 : 0(x+1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$, in forma compatta $\delta_2 : y + z = 2$.

Una rappresentazione cartesiana della retta è la seguente: $m : \begin{cases} x - y - z = -3 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

(iv) Il piano per P ortogonale a r è stato determinato in precedenza $\delta_1 : x - y - z = -3$. Intersechiamo tale piano con la retta r, si trova:

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

La relazione è $t + t - 1 + t = -3 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{2}{3}$

Il punto S di r è $S \equiv \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$, risulta evidente che $d(P, r) = d(P, S) = \sqrt{\left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.