

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 30 Gennaio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$M = [(0, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 1), (-2, 0, -1, 1)] \quad N_s^\perp = \{(x, y, -sy, t) \mid x, y, t \in \mathbb{R}\}$$

- Determinare una rappresentazione cartesiana di $L(M)$ e una sua base T .
- Al variare di $s \in \mathbb{R}$ determinare una base K di $L(M) \cap N_s^\perp$.
- Dire per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(L(M) + N_s) = 3$. (Giustificare la risposta).

2. Sia assegnata la seguente matrice parametrica:

$$A_r = \begin{pmatrix} r & r-1 & r+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Al variare di $r \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $A_r^T X = B$.

3. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$f_m : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_m(x, y, z, t) = (x + (m-1)t, x + y + z + t, (m-1)x + z + mt)$$

- Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $\text{Im } f_m$.
- Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ $f_m^{-1}(0, 0, 0)$.
- Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_m è un epimorfismo? (Giustificare la risposta).

4. La matrice A_f di un endomorfismo di \mathbb{R}^3 rispetto alla base ordinata $B = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Determinare la legge $f(x, y, z)$.
- Studiare la diagonalizzabilità di f , nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, -1) \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \quad \pi : x + y + z + 1 = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

- Determinare la retta n per P incidente r e s .
- Determinare il piano α che contiene r e ortogonale a π .
- Determinare la retta m per P ortogonale a r e s .
- Calcolare la distanza tra il punto P e la retta r .