Esame di Geometria e Algebra

Matr._________________

Prova scritta 30 Gennaio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$M = [(0,1,0,1),(0,-1,-1,0),(0,0,-1,1),(0,-1,-2,1)] \qquad N_s^{\perp} = \{(x,y,-sx,t) \mid \ x,y,t \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di $L(M)$ e una sua base T.
(ii) Al variare di $s \in \mathbb{R}$ determinare una base K di $L(M) \cap N_s^{\perp}$.
(iii) Dire per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(L(M) \cap N_s) = 0$. (Giustificare la risposta).

2. Sia assegnata la seguente matrice parametrica:

$$A_r = \begin{pmatrix} r & r+1 & 1 & r-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $r \in \mathbb{R}$ determinare i vettori $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $A_r^T X = B$.

3. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_m \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_m(x,y,z,t) \quad &= \quad (x+y+z+t, (m-1)x+z+mt, x+(m-1)t) \end{aligned}$$

(i) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $\mathrm{Im}\, f_m$.
(ii) Determinare al variare di $m \in \mathbb{R}$ $f_m^{-1}(0,0,0)$.
(iii) Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_m è un epimorfismo? (Giustificare la risposta).

4. La matrice A_f di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base ordinata $B = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la legge $f(x,y,z)$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,1) \qquad r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad \pi : x - y + z + 1 = 0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare la retta n per P incidente r e s.
(ii) Determinare il piano α che contiene r e ortogonale a π.
(iii) Determinare la retta m per P ortogonale a r e s.
(iv) Calcolare la distanta tra il punto P e la retta r.