Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 28 Giugno 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^{\perp} = L[(-2,0,1)] \qquad K = \{(\alpha+\gamma, \beta-\gamma, \alpha+\gamma) \mid \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di H.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di K.
(iii) Determinare una base di $H \cap K$.
(iv) Determinare i vettori u di $H^{\perp}$ che verificano la relazione $|u| = 1$.

(i) Sappiamo che $H = \left(H^{\perp}\right)^{\perp}$, dunque $H = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)\cdot(-2,0,1) = 0\} = \{(x,y,z) \mid -2x+z = 0\}$. In forma compatta $H = \{(x,y,z) \mid 2x - z = 0\}$. Una base di H si trova facilmente riscrivendo $H = \{(x,y,2x) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ e quindi una base è data dal sistema $[(1,0,2),(0,1,0)]$. La dimensione di H è 2.

(ii) Il sottospazio vettoriale K è assegnato in forma parametrica, $K = \{\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,-1,1) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$.

Un sistema di generatori di K è il seguente: $S = [(1,0,1),(0,1,0),(1,-1,1)]$, osserviamo che esso è legato in quanto la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2. Una base di K è data dal sistema $[(1,0,1),(0,1,0)]$. Una rappresentazione cartesiana di K si trova in corrispondenza della seguente condizione: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ e quindi $x - z = 0$, possiamo scrivere $K = \{(x,y,z) \mid x - z = 0\}$.

(iii) Per determinare una base di $H \cap K$ è sufficiente risolvere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, la matrice del sistema lineare omogeneo è $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, una tale matrice ha rango 2 e il sottospazio vettoriale intersezione ha dimensione 1. Una base è costituita dal vettore che ha le seguenti componenti: $u = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}, - \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}, \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = (0,1,0)$. In forma compatta una base di $H \cap K$ è data dal sistema $[(0,1,0)]$.

(iv) Il generico vettore di $H^{\perp}$ è del tipo $u_\alpha = (-2\alpha, 0, \alpha)$, bisogna imporre la condizione $|u_\alpha| = \sqrt{(-2\alpha,0,\alpha)\cdot(-2\alpha,0,\alpha)} = \sqrt{5\alpha^2} = 1$, ovvero $5\alpha^2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. In definitiva gli unici vettori che verificano la condizione sono i seguenti: $u_1 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $u_2 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

2. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il rango della matrice M_h^2 vale 3.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $M_h X = 0$ ammette infinite soluzioni, in tal caso determinarle.

(i) Il determinate della matrice M_h è $\begin{vmatrix} 0 & 1 & h-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-h$. Per il teorema di Binet si ha: $\left|M_h^2\right| = |M_h| \cdot |M_h| = (1-h)(1-h) = (1-h)^2$. Sappiamo che il rango di M_h^2 è 3 se e solo se $\left|M_h^2\right| \neq 0$, possiamo concludere che $\rho\left(M_h^2\right) = 3 \Longleftrightarrow h \neq 1$.

(ii) La relazione matriciale $M_h X = 0$ equivale al sistema lineare omogeneo $\begin{cases} y + (h-1)z = 0 \\ x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$, ovvio che se $h \neq 1$ l'unica soluzione è quella banale. Si hanno infinite soluzioni quando $h = 1$, in tal caso un sistema equivalente è il seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ è l'insieme delle soluzioni è
$S = \{(0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_h &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) &= (x + (h+1)y + z, y + z, x + z) \end{aligned}$$

(i) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ un tale endomorfismo è suriettivo.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{erf}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(i) La matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base canonica è la seguente: $A = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le colonne di tale matrice generano l'immagine. Sappiamo che $\begin{vmatrix} 1 & h+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h+1$, dunque se $h \neq -1$ l'immagine ha dimensione 3 e quindi risulta essere un epimorfismo.

(ii) Ovvio che se $h \neq -1$ poichè $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$, per l'equazione dimensionale, $\dim K\,\mathrm{erf} = 3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 3 = 0$ e quindi $K\,\mathrm{erf} = \{(0,0,0)\}$.

Se $h = -1$, allora la matrice A diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, essa ha rango 2 e di conseguenta $\dim K\,\mathrm{erf} = 1$. Il nucleo dell'applicazione si determina in corrsipondenza del sistema lineare omogeneo associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una tale matrice ha rango 2 e come al solito una base di $K\,\mathrm{erf}$ è costituita dal vettore: $u = \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}, - \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) = (-1,-1,1)$. In forma compatta per $h = -1$ si ha $K\,\mathrm{erf} = L[(1,1,-1)]$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_h &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) &= (y + (h+1)z, -y + (h+1)z, hz) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

Sia $h = 0$, la matrice $A_{f_0} - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2, l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ non è regolare e quindi l'endomorfismo f_0 non è diagonalizzabile.

(i) La matrice che rappresenta f_h nella base canonica è la seguente: $A_{f_h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h+1 \\ 0 & -1 & h+1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, sarà

$A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & h+1 \\ 0 & -1-\lambda & h+1 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{pmatrix}$ e

quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & h+1 \\ 0 & -1-\lambda & h+1 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)(h-\lambda)$.

Determiniamo gli autovalori: $-\lambda(-1-\lambda)(h-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = h$.

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $h = 0$ o $h = -1$.

Sia $h = -1$, in questo caso $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, si ha:

$A_{f_{-1}} + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_{-1}} + I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:

$\{ \; x + y = 0 \;\; \Longrightarrow \{ \; x = -y$

$V_{-1} = \{(-y, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 0, 1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ è $V_{-1} = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - 0I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = 0$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_{-1}} - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$.

$V_0 = \{(x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 0, 0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_1 = 0$ è $V_0 = [(1, 0, 0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_{-1}}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $h = -1$ è la seguente: $B = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)]$.

Sia $h = 0$, in questo caso $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

Utilizzando la matrice $A_{f_0} - 0I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, si ha:

$A_{f_0} - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_0} - I) = 2 \Longrightarrow$ l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ non è regolare e quindi l'endomorfismo f_0 non è diagonalizzabile.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$O \equiv (0,0,0) \qquad P \equiv (1,-1,0) \qquad Q \equiv (0,-1,0) \qquad r: \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se i punti O, P e Q non sono allineati, eventualmente determinare il piano π che li contiene.

(ii) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s. In quest'ultimo caso determinare anche la distanza tra le due rette.

(iii) Determinare la retta l per O complanare con r e ortogonale a s.

(i) Calcoliamo le direzioni dei vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, si ha: $\overrightarrow{OP} = (1,-1,0)$ e $\overrightarrow{OQ} = (0,-1,0)$. Tali vettori hanno le componenti non proporzionali e quindi i punti non sono allineati. Il piano che contiene i tre punti è il seguente:

$$\pi \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

In forma compatta $\pi \quad : \quad z = 0.$

(ii) Intanto determiniamo la direzione di r calcolando il determinante delle sottomatrici a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = -1$, quindi $\overrightarrow{r} = (1,1,-1)$. I parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (1,-1,-1)$, le rette non sono parallele. Le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili in quanto in r si ha $x+z=0$ e invece in s si ha $x+z=2$ (In ogni caso potete adottare qualsiasi altro criterio suggerito per controllare che le rette sono sghembe).

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = -2$, $\mu = 0$, $\nu = -2$, quindi $\overrightarrow{n} = (1,0,1)$.

Piano che contiene r e che contiene la direzione normale. Prendiamo un punto a piacere di r, per esempio $T \equiv (0,1,0)$:

$$\delta_1 \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - 2y - z = -2$$

In forma compatta $\delta_1 \quad : \quad x - 2y - z = -2.$

Piano che contiene s e che contiene la direzione normale. Prendiamo un punto a piacere di s, per esempio $S \equiv (1,0,1)$:

$$\delta_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + 2y - z = 0$$

In forma compatta $\delta_2 \quad : \quad x + 2y - z = 0.$

Una rappresentazione cartesiana della retta ortogonale e incidente le due rette sghembe è data dall'intersezione dei due piani precedenti:

$$n : \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Per calcolare la distanza tra le due rette è sufficiente calcolare il piano ε per r parallelo a s. Successivamente calcolare la distanza di un qualsiasi punto di s dal piano ε.

Piano ε che contiene r e che la direzione di s. Prendiamo un punto a piacere di r, per esempio $T \equiv (0, 1, 0)$:

$$\varepsilon \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + z = 0$$

In forma compatta $\varepsilon \quad : \quad x + z = 0.$

Ora consideriamo un generico punto della retta s, ad esempio il punto $S \equiv (1, 0, 1)$ e calcoliamo la distanza di tale punto dal piano appena determinato.

$d(Q, \pi) = \dfrac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

(iii) La retta l cercata è intersezione di due piani. Il primo per O che contiene r e il secondo piano per O ortogonale a s.

Piano per O che contiene r

Tale piano deve contenere la direzione di r e la direzione di un $\overrightarrow{OP}$ co P punto a piacere preso su r. Prendiamo $T \equiv (0, 1, 0)$.

$\sigma_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + z = 0.$

Piano per O ortogonale a s

$\sigma_2 : 1(x - 0) - 1(y - 0) - 1(z - 0) = 0 \Longleftrightarrow x - y - z = 0.$

Una rappresentazione della retta cercata è la seguente:

$$l : \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$