# Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 28 Giugno 2013

**Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)** Cognome e Nome______________________________

**1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^\perp = L[(-1,0,2)] \qquad K = \{(\alpha+\gamma, \alpha+\gamma, \beta-\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $H$.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $K$.
(iii) Determinare una base di $H \cap K$.
(iv) Determinare i vettori $u$ di $H^\perp$ che verificano la relazione $|u| = 1$.

(i) Sappiamo che $H = \left(H^\perp\right)^\perp$, dunque $H = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)\cdot(-1,0,2) = 0\} = \{(x,y,z) \mid -x+2z = 0\}$. In forma compatta $H = \{(x,y,z) \mid x - 2z = 0\}$. Una base di $H$ si trova facilmente riscrivendo $H = \{(2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ e quindi una base è data dal sistema $[(2,0,1),(0,1,0)]$. La dimensione di $H$ è 2.

(ii) Il sottospazio vettoriale $K$ è assegnato in forma parametrica, $K = \{\alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,1,-1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Un sistema di generatori di $K$ è il seguente: $S = [(1,1,0),(0,0,1),(1,1,-1)]$, osserviamo che esso è legato in quanto la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2. Una base di $K$ è data dal sistema $[(1,1,0),(0,0,1)]$. Una rappresentazione cartesiana di $K$ si trova in corrispondenza della seguente condizione: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e quindi $x - y = 0$, possiamo scrivere $K = \{(x,y,z) \mid x - y = 0\}$.

(iii) Per determinare una base di $H \cap K$ è sufficiente risolvere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, la matrice del sistema lineare omogeneo è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, una tale matrice ha rango 2 e il sottospazio vettoriale intersezione ha dimensione 1. Una base è costituita dal vettore che ha le seguenti componenti: $u = \left( \begin{matrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{matrix}, -\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right) = (-2,-2,-1)$. In forma compatta una base di $H \cap K$ è data dal sistema $[(2,2,1)]$.

(iv) Il generico vettore di $H^\perp$ è del tipo $u_\alpha = (-\alpha, 0, 2\alpha)$, bisogna imporre la condizione $|u_\alpha| = \sqrt{(-\alpha,0,2\alpha)\cdot(-\alpha,0,2\alpha)} = \sqrt{5\alpha^2} = 1$, ovvero $5\alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. In definitiva gli unici vettori che verificano la condizione sono i seguenti: $u_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e $u_2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

**2**. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $M_h^2$ vale 3.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $M_h X = 0$ ammette infinite soluzioni, in tal caso determinarle.

(i) Il determinate della matrice $M_h$ è $\begin{vmatrix} 0 & h+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = h+1$. Per il teorema di Binet si ha:

$\left|M_h^2\right| = |M_h| \cdot |M_h| = (h+1)(h+1) = (h+1)^2$. Sappiamo che il rango di $M_h^2$ è 3 se e solo se $\left|M_h^2\right| \neq 0$, possiamo concludere che $\rho\left(M_h^2\right) = 3 \Longleftrightarrow h \neq -1$.

(ii) La relazione matriciale $M_h X = 0$ equivale al sistema lineare omogeneo $\begin{cases} (h+1)y + z = 0 \\ x = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$, ovvio che se $h \neq -1$ l'unica soluzione è quella banale. Si hanno infinite soluzioni quando $h = -1$, in tal caso un sistema equivalente è il seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ è l'insieme delle soluzioni è
$S = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

**3**. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{array}{rcl} f_h & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) & = & (x + (h-1)y + z, x + y, x + z) \end{array}$$

(i) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ un tale endomorfismo è suriettivo.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{erf}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(i) La matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base canonica è la seguente: $A = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le colonne di tale matrice generano l'immagine. Sappiamo che $\begin{vmatrix} 1 & h-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - h$, dunque se $h \neq 1$ l'immagine ha dimensione 3 e quindi risulta essere un epimorfismo.

(ii) Ovvio che se $h \neq 1$ poichè $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$, per l'equazione dimensionale, $\dim K\,\mathrm{erf} = 3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 3 = 0$ e quindi $K\,\mathrm{erf} = \{(0,0,0)\}$.

Se $h = 1$, allora la matrice $A$ diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, essa ha rango 2 e di conseguenta $\dim K\,\mathrm{erf} = 1$.
Il nucleo dell'applicazione si determina in corrsipondenza del sistema lineare omogeneo associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, una tale matrice ha rango 2 e come al solito una base di $K\,\mathrm{erf}$ è costituita dal vettore: $u = \left( \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, - \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right) = (-1, 1, 1)$. In forma compatta per $h = 1$ si ha $K\,\mathrm{erf} = L[(1, -1, -1)]$.

**4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} f_h & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) & = & (-y + (1-h)z, y - (h+1)z, -hz) \end{array}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di $f_h$ solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base $B$ di autovettori e scrivere la matrice $P$ che diagonalizza $A_{f_h}$.

(i) La matrice che rappresenta $f_h$ nella base canonica è la seguente: $A_{f_h} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-h \\ 0 & 1 & -h-1 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$, sarà $A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1-h \\ 0 & 1-\lambda & -h-1 \\ 0 & 0 & -h-\lambda \end{pmatrix}$ e
quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-h \\ 0 & 1-\lambda & -h-1 \\ 0 & 0 & -h-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-h-\lambda)$.

Determiniamo gli autovalori: $-\lambda(1-\lambda)(-h-\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda_1=0,\, \lambda_2=1,\, \lambda_3=-h.$

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $h=0$ o $h=-1$.

<u>Sia $h=-1$</u>, in questo caso $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}}-I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2=\lambda_3=1$, si ha:

$A_{f_{-1}}-I=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_{-1}}-I)=1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:

$\left\{\ x+y-2z=0\right. \Longrightarrow \left\{\ x=-y+2z\right.$

$V_1=\{(-y+2z,y,z)$ con $y,z\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1=(-1,1,0)$ e $u_2=(2,0,1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2=\lambda_3=1$ è $V_1=[(-1,1,0),(2,0,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}}-0I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1=0$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_{-1}}-0I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}.$

$V_0=\{(x,0,0)$ con $x\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3=(1,0,0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_1=0$ è $V_0=[(1,0,0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_{-1}}$ è la seguente:

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice $P$ che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $h=-1$ è la seguente: $B=[(-1,1,0),(2,0,1),(1,0,0)]$ .

<u>Sia $h=0$</u>, in questo caso $\lambda_1=\lambda_3=0$ e $\lambda_2=1$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1=\lambda_3=0$.

Utilizzando la matrice $A_{f_0}-0I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1=\lambda_3=0$, si ha:

$A_{f_0}-0I=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_0}-I)=1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:

$\left\{\ y-z=0\right. \Longrightarrow \left\{\ y=z\right.$

$V_0=\{(x,z,z)$ con $x,z\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1=(1,0,0)$ e $u_2=(0,1,1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_1=\lambda_3=0$ è $V_0=[(1,1,0),(0,1,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_0}-I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2=1$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_0}-I=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ z=0 \end{cases}.$

$V_1=\{(-y,y,0)$ con $y\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3=(1,-1,0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_2=1$ è $V_1=[(1,-1,0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_0}$ è la seguente:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice $P$ che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $h = 0$ è la seguente: $B = [(1,0,0),(0,1,1),(1,-1,0)]$.

**5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$O \equiv (0,0,0) \qquad P \equiv (1,0,-1) \qquad Q \equiv (1,0,0) \qquad r: \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se i punti $O, P$ e $Q$ non sono allineati, eventualmente determinare il piano $\pi$ che li contiene.
(ii) Verificare se le rette $r$ e $s$ sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano che le contiene e se sghembe la retta $n$ ortogonale e incidente le rette $r$ e $s$. In quest'ultimo caso determinare anche la distanza tra le due rette.
(iii) Determinare la retta $l$ per $O$ complanare con $r$ e ortogonale a $s$.

(i) Calcoliamo le direzioni dei vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, si ha: $\overrightarrow{OP} = (1,0,-1)$ e $\overrightarrow{OQ} = (1,0,0)$. Tali vettori hanno le componenti non proporzionali e quindi i punti non sono allineati. Il piano che contiene i tre punti è il seguente:

$$\pi \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y = 0$$

In forma compatta $\pi \quad : \quad y = 0$.

(ii) Intanto determiniamo la direzione di $r$ calcolando il determinante delle sottomatrici a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{r} = (1,-1,-1)$. I parametri direttori di $s$ sono $\overrightarrow{s} = (1,-1,1)$, le rette non sono parallele. Le equazioni che definiscono $r$ e $s$ sono incompatibili in quanto in $r$ si ha $x+y=0$ e invece in $s$ si ha $x+y=1$ (In ogni caso potete adottare qualsiasi altro criterio suggerito per controllare che le rette sono sghembe).

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a $r$ e $s$ considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:
$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = -2$, $\mu = -2$, $\nu = 0$, quindi $\overrightarrow{n} = (1,1,0)$.

Piano che contiene $r$ e che contiene la direzione normale. Prendiamo un punto a piacere di $r$, per esempio $T \equiv (0,0,1)$:

$$\delta_1 \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y + 2z = 2$$

In forma compatta $\delta_1 \quad : \quad x - y + 2z = 2$.

Piano che contiene $s$ e che contiene la direzione normale. Prendiamo un punto a piacere di $s$, per esempio $S \equiv (1,0,1)$:

$$\delta_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y - 2z = -1$$

In forma compatta $\delta_2 \quad : \quad x - y - 2z = -1$.

Una rappresentazione cartesiana della retta ortogonale e incidente le due rette sghembe è data dall'intersezione dei due piani precedenti:

$$n : \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Per calcolare la distanza tra le due rette è sufficiente calcolare il piano $\varepsilon$ per $r$ parallelo a $s$. Successivamente calcolare la distanza di un qualsiasi punto di $s$ dal piano $\varepsilon$.

Piano $\varepsilon$ che contiene $r$ e che la direzione di $s$. Prendiamo un punto a piacere di $r$, per esempio $T \equiv (0, 0, 1)$ :

$$\varepsilon \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + y = 0$$

In forma compatta $\varepsilon \quad : \quad x + y = 0.$

Ora consideriamo un generico punto della retta $s$, ad esempio il punto $S \equiv (1, 0, 1)$ e calcoliamo la distanza di tale punto dal piano appena determinato.

$d(Q, \pi) = \dfrac{|1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(iii) La retta $l$ cercata è intersezione di due piani. Il primo per $O$ che contiene $r$ e il secondo piano per $O$ ortogonale a $s$.

Piano per $O$ che contiene $r$

Tale piano deve contenere la direzione di $r$ e la direzione di un vettore $\overrightarrow{OP}$ co $P$ punto a piacere preso su $r$. Prendiamo $T \equiv (0, 0, 1)$.

$$\sigma_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + y = 0.$$

Piano per $O$ ortogonale a $s$

$\sigma_2 : 1(x - 0) - 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 0.$

Una rappresentazione della retta cercata è la seguente:

$$l : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$