

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 28 Giugno 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^\perp = L[(-2, 0, 1)] \quad K = \{(\alpha + \gamma, \beta - \gamma, \alpha + \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

- Determinare una base e la dimensione di H .
- Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di K .
- Determinare una base di $H \cap K$.
- Determinare i vettori u di H^\perp che verificano la relazione $|u| = 1$.

2. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il rango della matrice M_h^2 vale 3.
- Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $M_h X = 0$ ammette infinite soluzioni, in tal caso determinarle.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (x + (h+1)y + z, y + z, x + z)$$

- Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ un tale endomorfismo è suriettivo.
- Determinare una base e la dimensione di $\text{Ker } f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x, y, z) = (y + (h+1)z, -y + (h+1)z, hz)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h} .

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$O \equiv (0, 0, 0) \quad P \equiv (1, -1, 0) \quad Q \equiv (0, -1, 0) \quad r : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

- Verificare se i punti O , P e Q non sono allineati, eventualmente determinare il piano π che li contiene.
- Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s . In quest'ultimo caso determinare anche la distanza tra le due rette.
- Determinare la retta l per O complanare con r e ortogonale a s .