Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 28 Giugno 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H^{\perp} = L[(-1,0,2)] \qquad K = \{(\alpha+\gamma, \alpha+\gamma, \beta-\gamma) \mid \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di H.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di K.
(iii) Determinare una base di $H \cap K$.
(iv) Determinare i vettori u di $H^{\perp}$ che verificano la relazione $|u| = 1$.

2. Assegnato la seguente matrice parametrica:

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il rango della matrice M_h^2 vale 3.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $M_h X = 0$ ammette infinite soluzioni, in tal caso determinarle.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{array}{rcl} f_h & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) & = & (x+(h-1)y+z, x+y, x+z) \end{array}$$

(i) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ un tale endomorfismo è suriettivo.
(ii) Determinare una base e la dimensione di $K\mathrm{erf}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} f_h & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) & = & (-y+(1-h)z, y-(h+1)z, -hz) \end{array}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_h solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_h}.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$O \equiv (0,0,0) \qquad P \equiv (1,0,-1) \qquad Q \equiv (1,0,0) \qquad r : \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se i punti O, P e Q non sono allineati, eventualmente determinare il piano π che li contiene.
(ii) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s. In quest'ultimo caso determinare anche la distanza tra le due rette.
(iii) Determinare la retta l per O complanare con r e ortogonale a s.