

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 28 Febbraio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$M_h = \{(\beta, \alpha h - \beta, \alpha + \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad N_h = \{(\alpha + \beta, \beta, \alpha h - \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } h \in \mathbb{R}$$

- Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(M_h \cap N_h) = 0$.
- Determinare una base e la relativa dimensione di $M_h + N_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
- Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $M_h + N_h$ quando esso non coincide con \mathbb{R}^4 .

2. Sia assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z :

$$\begin{cases} x + hy + (2 - h)z = 0 \\ y - z = h - 1 \\ x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- Determinare le soluzioni del sistema lineare al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell'endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle basi $B = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ e $B' = ((1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$, è la seguente:

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare la dimensione e una base di $\text{Im } f_h$ e $\text{Ker } f_h$ con $h \in \mathbb{R}$.
- Determinare $f_h(0, 1, 1)$.

4. La matrice A_f di un endomorfismo di \mathbb{R}^3 rispetto alla base ordinata $B = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinare la legge $f(x, y, z)$.
- Studiare la diagonalizzabilità di f , nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad \pi : x + z = 1$$

Risolvere i seguenti punti:

- Determinare la retta n ortogonale e incidente r e s e la relativa distanza tra le due rette.
- Determinare il piano α che passa per P e parallelo con r e s .
- Determinare il piano β che contiene s e ortogonale a π .