Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 28 Febbraio 2014

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$M_h = \{(\alpha h - \beta, \beta, \alpha + \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \qquad N_h = \{(\beta, \alpha + \beta, \alpha h - \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } h \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta $\dim(M_h \cap N_h) = 0$.
(ii) Determinare una base e la relativa dimensione di $M_h + N_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(iii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $M_h + N_h$ quando esso non coincide con $\mathbb{R}^4$.

2. Sia assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} hx + y + (2-h)z = h + 1 \\ x - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare le soluzioni del sistema lineare al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell' endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle basi $B = ((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0))$ e $B' = ((1,0,1), (1,0,0), (1,1,0))$, è la seguente:

$$A_{f_h} = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f_h$ e $K\operatorname{erf}_h$ con $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare $f_h(0,1,1)$.

4. La matrice A_f di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base ordinata $B = ((0,-1,0), (1,0,0), (0,0,1))$ è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la legge $f(x,y,z)$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile scrivere la matrice P che diagonalizza A_f e determinare una base B di autovettori.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0,-1,1) \qquad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \pi : x - z = 1$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare la retta n ortogonale e incidente r e s e la relativa distanza tra le due rette.
(ii) Determinare il piano α che passa per P e parallelo con r e s.
(iii) Determinare il piano β che contiene s e ortogonale a π.