Esame di Geometria e Algebra

Matr.____________________

Prova scritta 19 Dicembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(1,1,t-1,t),(0,1,-1,1)] \qquad U_k^{\perp} = \left\{(x,y,z,t) \mid \ kx - y = k-1,\ x+y = k^2-1\right\}$$

(i) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme $U_k^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Giustificare la risposta.
(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di U_1 e una sua base T.
(iii) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = L(S_t) \oplus U_1$.
(iv) Ortonormalizzare i vettori del sistema S_0.

(i) Per rispondere alla domanda è sufficiente ricordare che un sottospazio vettoriale è possibile rappresentarlo con un sistema di **equazioni lineari omogenee**. In primo luogo dobbiamo imporre le condizioni che i termini noti delle relazioni siano nulli: $\begin{cases} k-1=0 \\ k^2-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} k=1 \\ k=\pm 1 \end{cases} \iff k=1.$

Per $k=1$ otteniamo $U_1^{\perp} = \{(x,y,z,t) \mid \ x-y=0,\ x+y=0\}$ e riconosciamo che esso è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(ii) Per $U_1^{\perp}$ abbiamo 2 equazioni lineari omogenee in 4 variabili e possiamo concludere che $\dim U_1^{\perp}$ =(numero variabili)$-$(equazioni indipendenti)$=\ 4-2=2$. Una base di U_1 è data dal sistema $T = [(1,-1,0,0),(1,1,0,0)]$ (sono i coefficienti delle equazioni lineari omogenee di $U_1^{\perp}$).

Il sistema T genera un sottospazio di dimensione 2 e una sua rappresentazione cartesiana non è difficile da determinare: $U_1 = \{(x,y,z,t) \mid \ z=0,\ t=0\}$

Per determinare una base di U_1 e una sua rappresentazione cartesiana è possibile procedere anche in un altro modo:

$U_1^{\perp} = \{(x,y,z,t) \mid \ x-y=0,\ x+y=0\} = \{(0,0,z,t) \mid \ z,t \in \mathbb{R}\} = L[(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$.

Sembra evidente che $U_1 = \{(x,y,z,t) \mid \ (x,y,z,t)\cdot(0,0,1,0)=0,\ (x,y,z,t)\cdot(0,0,0,1)=0\} = \{(x,y,z,t) \mid \ z=0,\ t=0\}$. In forma compatta $U_1 = \{(x,y,z,t) \mid \ z=0,\ t=0\}$, dunque $U_1 = L[(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$ e una base di U_1 è data sistema $M = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$. Non bisogna allarmarsi se abbiamo ottenuto due basi distinte, esse sono due basi dello stesso spazio vettoriale U_1!

(iii) Osserviamo che il sistema $S_t = [(1,1,t-1,t),(0,1,-1,1)]$ è costituito da due vettori linearmente indipendenti $\forall t \in \mathbb{R}$, dunque $\dim L(S_t) = 2\ \forall t \in \mathbb{R}$. Sappiamo anche che $\dim U_1 = 2$, bisogna studiare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t-1 & t \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Non è difficile controllare che $|A| \neq 0 \iff 2t-1 \neq 0 \iff t \neq \dfrac{1}{2}$.Possiamo concludere per $t \neq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dim(L(S_{\frac{1}{2}}) + U_1) = 4$ e $\dim(L(S_{\frac{1}{2}}) \cap U_1) = 0$ e quindi $\mathbb{R}^4 = L(S_{\frac{1}{2}}) \oplus U_1$.

(iv) Per $t=0$ otteniamo il sistema $S_0 = [(1,1,-1,0),(0,1,-1,1)]$, esso non è un sistema ortogonale in quanto $(1,1,-1,0)\cdot(0,1,-1,1) \neq 0$.

Poniamo $u_1 = (1,1,-1,0)$,

$\overline{u}_2 = (0,1,-1,1) - \dfrac{(0,1,-1,1)\cdot(1,1,-1,0)}{(1,1,-1,0)\cdot(1,1,-1,0)}(1,1,-1,0) = (0,1,-1,1) - \dfrac{2}{3}(1,1,-1,0) = (0,1,-1,1) + \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 0\right) = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right)$. Consideriamo il vettore $u_2 = 3\overline{u}_2 = (-2,1,-1,3)$, il sistema $R = [(1,1,-1,0),(-2,1,-1,3)]$ è ortogonale. Per determinare un sistema ortonormale è sufficiente calcolare il modulo di ciascun vettore e poi dividere ogni componente dei vettori per tale modulo.

Il sistema $N = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5} \right) \right]$ è un sistema ortonormale.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y e z : (RISOLVERE CON UNO DEI METODI RICONOSCIUTI)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 - k \\ kz = -k^2 + 1 \\ z = k - 1 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare non possono essere il nucleo di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare di 4 equazioni lineari in 3 variabili, scriviamo immediatamente la matrice completa del sistema lineare:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1-k \\ 0 & 0 & k & -k^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di tale matrice, applicando Laplace si trova: $|M| = 2k^2 - k - 1$.

Se $2k^2 - k - 1 \neq 0 \iff k \neq 1 \wedge k \neq -\frac{1}{2}$ il sistema lineare è incompatibile in quanto la matrice completa avrebbe rango 4.

Discutiamo i casi partcolari:

$k = 1$

La matrice diventa: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, essa è a scala e il sistema lineare equivalente è il seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e con banali sostituzioni a ritroso si trova $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$k = -\frac{1}{2}$

La matrice diventa: $M_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

essa è a scala e il sistema lineare equivalente è il seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ 2y - 2z = 3 \\ -2z = 3 \end{cases}$ e con banali sostituzioni a ritroso si trova $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

(ii) Solo per $k = 1$ le soluzioni del sistema lineare possono essere il nucleo di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ e questo perchè la soluzione $\{(0,0,0)\}$ è un sottospazio vettoriale, negli altri casi non è un sottospazio vettoriale e la risposta alla domanda è $k \neq 1$.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^2+bx+c) & = & (a+c)x^2+(b-c)x+(a+b) \end{array}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{erf}$ e $\mathrm{Im}\, f$.

(ii) Determinare $f^{-1}(x^2-x)$.

(i) Utilizzando la nozione di isomorfismo (ricordiamo che $\mathbb{R}_2[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$) possiamo scrivere la seguente applicazione:

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$F(a,b,c) = (a+c, b-c, a+b)$

Calcoliamo la matrice A_F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, si trova $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si trova facilmente che una tale matrice ha rango 2 (le prime due colonne sono linearmente indipendenti), dunque F è non suriettiva. "Trasportando" in $\mathbb{R}_2[x]$ tale risultato, mediante l'isomorfismo, possiamo dire che una base di $\mathrm{Im}\, f$ è $[x^2+x, x+1]$.

(ii) Se $\mathrm{Im}\, F$ ha dimensione 2, allora per l'equazione dimensionale $KerF$ deve avere dimensione 1. In corrsipondenza del sistema lineare:

$\begin{cases} a+c=0 \\ b-c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$, come al solito la matrice del sistema lineare è $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (il determinate è nullo, si cancella la terza riga e si calcolano i determinati delle sottomatrici a segno alterno).

Si trova la base generata dal vettore $u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1,1,1)$. In forma compatta $u = (-1,1,1)$.

Dunque $K\,\mathrm{erf}$ ha dimensione 1 è una base è data dal sistema $[-x^2+x+1]$.

(ii) Determinare $f^{-1}(x^2-x)$ vuol dire calcolare $F^{-1}(1,-1,0)$ e quindi risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} a+c=1 \\ b-c=-1 \\ a+b=0 \end{cases}$, la matrice di tale sistema lineare è la seguente: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il sistema equivalente è il seguente:

$\begin{cases} a = 1-c \\ b = -1+c \end{cases}$ (già risolto perchè la matrice a scala è anche ridotta (vedere definizione di matrice a scala ridotta)). Utilizzando l'isomorfismo possiamo dire che un polinomio $p_k(x) = (1-k)x^2 + (-1+k)x + k$ è tale che $f(p_k(x)) = x^2 - x \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) & = & (0, -2x+2y, 2x+2z) \end{array}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(iii) Determinare $\dim K\,\mathrm{erf}$ e una relativa base.

$f(0,0,1) = (0,0,2)$;

$f(1,0,0) = (0,-2,2)$;
$f(0,1,0) = (0,2,0)$;

La base canonica si ottiene effettuando una permuatzione sui vettori assegnati, le componenti seguono la stessa regola: $3 \hookrightarrow 1 \hookrightarrow 2$.

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda)\,(2-\lambda)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, si ha:

$A_f - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{y = 0$. L'autospazio $V_2 = \{(x,0,z)$ con $x, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$, quindi $V_2 = L\left[(1,0,0),(0,0,1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 0$. Utilizzando la matrice $A_f - 0I$, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$A_f - 0I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$. L'autospazio $V_0 = \{(-y,y,y)$ con $y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,-1,-1)$, quindi $V_0 = L\left[(1,-1,-1)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_fP = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Vedere quanto detto nelle note del sito a riguardo o nelle soluzioni di prove assegnate in precedenza.

Una base di autovettori è la seguente: $T = \left[(0,0,1),(0,1,0),(-1,-1,1)\right]$.

(iii) Osserviamo che un autovalore è nullo e il relativo autospazio coincide con $K\,\mathrm{erf} = L\left[(-1,-1,1)\right]$ e $\dim K\,\mathrm{erf} = 1$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,0,0) \qquad Q \equiv (0,1,-1) \qquad R \equiv (1,0,1) \qquad S \equiv (0,0,1) \qquad r : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \pi : x+y+z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e determinare il piano α che li contiene. I punti P, Q,R e S sono complanari?

(ii) Determinare la retta l passante per P e Q. Calcolare la distanza tra le rette l e r.

(iii) Determinare il piano β per S perpendicolare a π e parallelo a r.

(iv) Determinare la retta m passante per S parallela a π e ortogonale a r.

(i) Sappiamo che $\overrightarrow{PQ} = (1,-1,1)$ e $\overrightarrow{PR} = (0,0,-1)$, tali vettori non sono proporzionali e quindi i tre punti non sono allineati. Il piano che li contiene è il seguente:

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \quad : \quad x + y = 1$$

I punti non sono complanari in quanto le cordinate di S non soddisfano l'equazione del piano α.

(ii) Una rappresentazione parametrica della retta è la seguente: $l : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$. Si verifica facilmente che le rette sono sghembe, un piano per l è ovviamente $\alpha : x + y = 1$.

Determiniamo un piano δ per r parallelo a α :

$$\delta \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta \quad : \quad x - y - 2z = 0$$

Distanza di un qualsiasi punto di l dal piano δ. Come punto prendiamo $P \equiv (1,0,0)$:

$d(P,\delta) = \dfrac{|1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, in forma compatta $d(l,r) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

(iii) Il piano cercato deve passare per S, contenere la direzione ortogonale a π e la direzione di r :

$$\beta \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta \quad : \quad x - y = 0$$

(iv) La retta cercata si ottiene come intersezione del piano per S parallelo a π con il piano per S ortogonale r :

Un piano parallelo a π è $x + y + z = k$, passaggio per S e si ottiene $k = 1$. Il primo piano cercato ha equazione $x + y + z = 1$.

L'altro piano cercato ha equazione $x + y = 0$.

La retta cercata ha equazione

$$m : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$