Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 19 Dicembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(t,1,t-1,1),(1,1,-1,0)] \qquad U_k^{\perp} = \left\{(x,y,z,t) \mid \ (k-1)x - t = k-2,\ x+t = k^2-4\right\}$$

(i) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme $U_k^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Giustificare la risposta.
(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di U_2 e una sua base T.
(iii) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = L(S_t) \oplus U_2$.
(iv) Ortonormalizzare i vettori del sistema S_0.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y e z: (RISOLVERE CON UNO DEI METODI RICONOSCIUTI)

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y = k-2 \\ kx = 4-k^2 \\ x = k-2 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare non possono essere il nucleo di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^2+bx+c) \quad &= \quad (a+c)x^2 + (b+c)x + (a-b) \end{aligned}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di $K\,\mathrm{er} f$ e $\mathrm{Im}\, f$.
(ii) Determinare $f^{-1}(x^2+x)$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (0, x+y, x+z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.
(iii) Determinare $\dim K\,\mathrm{er} f$ e una relativa base.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,0,0) \qquad Q \equiv (0,1,1) \qquad R \equiv (0,-1,1) \qquad S \equiv (0,-1,0) \qquad r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad \pi : x-y+z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e determinare il piano α che li contiene. I punti P, Q,R e S sono complanari?
(ii) Determinare la retta l passante per P e Q. Calcolare la distanza tra le rette l e r.
(iii) Determinare il piano β per S perpendicolare a π e parallelo a r.
(iv) Determinare la retta m passante per S parallela a π e ortogonale a r.