

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 19 Dicembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$S_t = [(1, t-1, 1, t), (0, -1, 1, 2)] \quad U_k^\perp = \{(x, y, z, t) \mid kx + z = k + 1, x + z = k^2 - 1\}$$

- Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme U_k^\perp è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 ? Giustificare la risposta.
- Determinare una rappresentazione cartesiana di U_{-1} e una sua base T .
- Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = L(S_t) \oplus U_{-1}$.
- Ortonormalizzare i vettori del sistema S_0 .

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y e z : (RISOLVERE CON UNO DEI METODI RICONOSCIUTI)

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = -k - 1 \\ kz = -k^2 + 1 \\ z = k + 1 \end{cases}$$

- Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- Dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare non possono essere il nucleo di un endomorfismo di \mathbb{R}^3 .

3. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ f(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^2 + (b+c)x + (a-c)$$

- Determinare una base e la dimensione di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
- Determinare $f^{-1}(x^2 + 1)$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (0, -2x - 2y, 2x - 2z)$$

- Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
- Studiare la diagonalizzabilità di f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f .
- Determinare $\dim \text{Ker } f$ e una relativa base.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, -1, 0) \quad Q \equiv (0, -1, -1) \quad R \equiv (1, 0, 1) \quad S \equiv (0, 0, -1) \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \pi : x - y - z = 0$$

Risolvere i seguenti punti:

- Verificare che i punti P, Q e R non sono allineati e determinare il piano α che li contiene. I punti P, Q, R e S sono complanari?
- Determinare la retta l passante per P e Q . Calcolare la distanza tra le rette l e r .
- Determinare il piano β per S perpendicolare a π e parallelo a r .
- Determinare la retta m passante per S parallela a π e ortogonale a r .