Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 14 Novembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_k = L[(1,0,0,1),(2-k,-1,0,2),(k,1,0,0)] \qquad K^{\perp} = \{(\alpha,-\beta,0,\beta) \mid \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di H_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare una rappresentazione parametrica di K.
(iii) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si verifica la condizione $\dim(H_k \cap K) = 0$.
(iv) Estendere una base di H_0 ad una base T di $\mathbb{R}^4$ e ortonormalizzarla.

(i) Scriviamo la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2-k & -1 & 0 & 2 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e calcoliamo il suo rango. La sottomatrice $M^{3,4}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e quindi $2 \le \rho(M_k) \le 3$. Dobbiamo controllare il determinante dei restanti due orlati della sottomatrice precedentemente scritta, ovvero di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-k & -1 & 0 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2-k & -1 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Non è difficile controllare che le ultime due matrici hanno determinante nullo, concludiamo che $\rho(M_k) = 2 \; \forall k \in \mathbb{R}$, quindi $\dim(H_k) = 2$ e una sua base è data dal sistema $S_k = [(1,0,0,1),(k,1,0,0)]$.

(ii) Una base si trova nel seguente modo: $K^{\perp} = \{(\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,-1,0,1)) \mid \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ e poichè il sistema di vettori $[(1,0,0,0),(0,-1,0,1)]$ è indipendente possiamo affermare che tale sistema è una base di $K^{\perp}$.

Possiamo scrivere $K = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t) \cdot (1,0,0,0) = 0, (x,y,z,t) \cdot (0,-1,0,1) = 0\}$, in maniera compatta

$K = \{(x,y,z,t) \mid x = 0, y - t = 0\}$. Non è diffcile scrivere una rappresentazione cartesiana: $K = \{(0,\alpha,\beta,\alpha) \mid \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

(iii) In primo luogo determiniamo una base di K : $\quad R = [(0,1,0,1),(0,0,1,0)]$ e $\dim K = 2$.

Per studiare la dimensione di $H_k + K$ bisogna determinare il rango della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, applicando Laplace alla quarta riga e con facili calcoli si trova $|M| = -k - 1$, possiamo concludere che se $k \neq -1 \Longrightarrow \dim(H_k + k) = 4$ e quindi $\dim(H_k \cap K) = 0$.

(iv) Una base di H_0 è data dal sistema $S_0 = [(1,0,0,1),(0,1,0,0)]$, tenendo conto dei risultati del punto precedente possiamo asserire che il sistema $V = [v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,1,0,0), v_3 = (0,1,0,1), v_4 = (0,0,1,0)]$ e una base di $\mathbb{R}^4$.

Osserviamo che v_1, v_2, v_4 sono ortogonali tra loro. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (0,0,1,0)$

$\overline{u}_4 = (0,1,0,1) - \dfrac{(0,1,0,1)\cdot(1,0,0,1)}{(1,0,0,1)\cdot(1,0,0,1)}(1,0,0,1) - \dfrac{(0,1,0,1)\cdot(0,1,0,0)}{(0,1,0,0)\cdot(0,1,0,0)}(0,1,0,0) - \dfrac{(0,1,0,1)\cdot(0,0,1,0)}{(0,0,1,0)\cdot(0,0,1,0)}(0,0,1,0) =$

$= (0,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) - 1(0,1,0,0) - 0(0,0,1,0) = (0,1,0,1) + \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right) + (0,-1,0,0) =$ $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$, dunque $\overline{u}_4 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ e noi per comodità prenderemo il vettore $u_4 = 2\overline{u}_4 = (-1,0,0,1)$.

Il sistema $W = [u_1 = (1,0,0,1),\, u_2 = (0,1,0,0),\, u_3 = (0,0,1,0), u_4 = (-1,0,0,1)]$ e ortogonale, normalizzarla non è difficile:

Il sistema $N = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0,0), (0,0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

2. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & k-1 & 0 \\ k-1 & 3-k & 1-k \\ k-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango della matrice A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare le soluzioni del sistema lineare $A_k X = \underline{0}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Calcoliamo il determinante della matrice A_k, applicando Laplace alla terza colonna si trova: $|A_k| = -(k-1)^2(k-2)$.

Con $k \neq 1 \wedge k \neq 2$ il rango della matrice A_k è 3. Studiamo i casi particolari:

$k = 1$, la matrice diventa $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il suo rango è 2;
$k = 2$, la matrice diventa $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il suo rango è 2.

(ii) I risultati precedenti sono utili per determinare le soluzioni del sistema lineare omogeneo parametrico. Con $k \neq 1 \wedge k \neq 2$ il sistema ammette solamente la soluzione banale: $S_k = \{(0,0,0)\}\ \forall k \in \mathbb{R}$.

Per $k = 1$ il sistema ammette ∞^1, si trova facilmente $S_1 = \{(0,0,h) \mid h \in \mathbb{R}\}$.
Per $k = 2$ il sistema ammette ∞^1, si trova facilmente $S_2 = \{(-h, 4h, 3h) \mid h \in \mathbb{R}\}$.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sistemi $H = [(0,1,1)]$ e $K = [(0,1,0), (0,0,0), (0,1,1)]$.

(i) Costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $K\,\mathrm{erf} = L[(0,1,1)]$ e $\mathrm{Im}\, f = L\,[(0,1,0),(0,0,0),(0,1,1)]$.
(ii) Determinare $f^{-1}\{(0,0,0)\}$.

(i) In primo luogo estendiamo ad una base di $\mathbb{R}^3$ la base di $K\,\mathrm{erf} = L[(0,1,1)]$. Una tale estensione può essere fatta in infiniti modi, noi prendiamo la base $T = [(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)]$. Determinata la base di $\mathbb{R}^3$ imponiamo le condizioni:

$f(0,1,1) = (0,0,0)$, $f(1,0,0) = (0,1,0)$, $f(0,1,0) = (0,1,1)$.

Troviamo le componenti del generico vettore: $(x,y,z) = \alpha(0,1,1) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,0) \Longleftrightarrow (x,y,z) =$ $(\beta, \alpha+\gamma, \alpha) \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = x \\ \alpha + \gamma = y \\ \alpha = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = x \\ \gamma = y - z \end{cases}$

Possiamo scrivere $f(x,y,z) = f[\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,0)] = f[z(0,1,1) + x(1,0,0) + (y-z)(0,1,0)] =$
$= zf(0,1,1) + xf(1,0,0) + (y-z)f(0,1,0) = z(0,0,0) + x(0,1,0) + (y-z)(0,1,1) = (0, x+y-z, y-z).$

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x,y,z) = (0, x+y-z, y-z)$.

(ii) Osserviamo che $f^{-1}\{(0,0,0)\} = K\,\text{erf} = L[(0,1,1)] = \{(0,h,h) \mid h \in \mathbb{R}\}$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x,y,z,t) \quad &= \quad (0,0,x-y+z-t,0) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(ii) Dire se tale endomorfismo è iniettivo.

La matrice A_f è la seguente: $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda - 1)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_4 = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, si ha:

$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice ha rango 1 e l'autovalore risulta essere REGOLARE (ricordate che $dimV_0 = 4 - \rho(A_f) \implies V_0 = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z-t = 0\}$. L'autospazio $V_0 = \{(y-z+t, y, z, t)$ con $y, z, t \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,1,0,0)$ e $u_2 = (-1,0,1,0)$, $u_3 = (1,0,0,1)$ quindi $V_0 = L[(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_4 = 1$. Utilizzando la matrice $A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$A_f - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. L'autospazio $V_1 = \{(0,0,z,0)$ con $z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_4 = (0,0,1,0)$, quindi $V_1 = L[(0,0,1,0)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.
E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_fP = D$ dove $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Una base di autovettori è la seguente $S = [(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,0,1,0)]$.

(ii) Tale endomorfismo è non iniettivo perche $K\mathrm{er}f = V_0$ (Un qualsiasi endomorfsmo che ammette un autovalore nullo non è iniettivo).

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,0,0) \qquad Q \equiv (0,1,0) \qquad R \equiv (1,1,1) \qquad r : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano α che li contiene.
(ii) Determinare la retta l passante per P e Q. Calcolare la distanza tra le rette l e r.
(iii) Determinare la retta m per P ortogonale e incidente r.
(iv) Verificare che le rette r e s sono sghembe e calcolare $d(r,s)$.

(i) Calcoliamo le direzioni dei vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$, si ha $\overrightarrow{PQ} = (1,-1,0)$ e $\overrightarrow{PR} = (0,1,1)$. Tali vettori hanno le componenti non proporzionali e quindi i punti non sono allineati. Il piano che contiene i tre punti è il seguente:

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + y - z = 1$$

In forma compatta $\alpha \quad : \quad x + y - z = 1$.

(ii) La retta l passante per P e Q ha la direzione $\overrightarrow{PQ} = (1,-1,0)$, una rappresentazione parametrica è la seguente: $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$ e una rappresentazione cartesiana è la seguente: $l : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Osserviamo che le rette l e r sono parallele in quanto hanno gli stessi parametri direttori. Per determinare la distanza tra l e r procediamo nel seguente modo:

Determinando un generico punto di l e quindi $P_l = (1+t, -t, 0)$.

Determinando un generico punto di r e quindi $Q_r = (-t, t, 1)$.

Scriviamo le componenti del vettore $\overrightarrow{P_lQ_r} = (1+2t, -2t, -1)$ e imponiamo che tale direzione sia ortogale alla direzione $(1,-1,0)$ (direzione comune a l e r), si trova $(1+2t,-2t,-1)\cdot(1,-1,0) = 0$ e quindi $1 + 2t + 2t = 0 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{1}{4}$.

Il punto di l è $P_l = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, 0\right)$, mentre il punto di r è $Q_r = \left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, 1\right)$. Possiamo concludere che $d(l,r) = d(P_l, Q_r) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, in forma compatta $d(l,r) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

(iii) Si considera il generico punto di r che indichiamo con $Q_r = (-t, t, 1)$ e calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ} = (1+t, -t, -1)$, imponiamo che la terna di componenti di tale vettore sia ortogonale alla direzione di r :

$$(1+t, -t, -1) \cdot (1, -1, 0) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2t = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}.$$

Concludiamo che la direzione della retta da determinare è $\overrightarrow{PQ_r} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \backsim (1, 1, -2)$. La retta m ha equazione parametrica: $m : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$ e una rappresentazione cartesiana è la seguente: $m : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

(iv) La direzione di r è data $\overrightarrow{r} = (1, -1, 0)$, la direzione di s è data da $\overrightarrow{s} = (0, 1, 0)$. Le due direzioni non sono proporzionali e si verifica facilmente che le rette sono sghembe in quanto il sistema: $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \\ x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ è incompatibile.

La direzione normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette si ottiene calcolando il determinate dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, dunque $\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$.

Piano che contiene r, la direzione $\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$ e un punto qualsiasi di r (ad esempio $V \equiv (0, 0, 1)$) :

$$n_1 \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$n_1 \quad : \quad x + y = 0$$

Piano che contiene s, la direzione $\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$ e un punto qualsiasi di s (ad esempio $O \equiv (0, 0, 0)$) :

$$n_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$n_2 \quad : \quad x = 0$$

La retta ortogonale e indicente r e s è la seguente: $n : \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Per calcolare la distanza tra le rette r e s, calcoliamo il piano δ per r parallelo a s. Sappiamo che tale piano deve contenere le direzioni di r e s e un punto a piacere scelto su r, come punto a piacere prenderemo il punto $V = (0, 0, 1)$. Il piano cercato è il seguente:

$$\delta \quad : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta \quad : \quad z = 1$$

La distanza tra le due rette r e s coincide con la distanza di un punto H preso a piacere su s dal piano $\delta : z - 1 = 0$.

$H = O = (0, 0, 0)$, $d(r, s) = d(H, \delta) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1$. In forma compatta $d(r, s) = 1$.