Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 14 Novembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_k = L[(1,0,0,1),(2-k,-1,0,2),(k,1,0,0)] \qquad K^{\perp} = \{(\alpha,-\beta,0,\beta) \mid \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base e la dimensione di H_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare una rappresentazione parametrica di K.
(iii) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si verifica la condizione $\dim(H_k \cap K) = 0$.
(iv) Estendere una base di H_0 ad una base T di $\mathbb{R}^4$ e ortonormalizzarla.

2. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & k-1 & 0 \\ k-1 & 3-k & 1-k \\ k-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango della matrice A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare le soluzioni del sistema lineare $A_k X = \underline{0}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sistemi $H = [(0,1,1)]$ e $K = [(0,1,0),(0,0,0),(0,1,1)]$.

(i) Costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $K\mathrm{erf} = L[(0,1,1)]$ e $\mathrm{Im}\, f = L\left[(0,1,0),(0,0,0),(0,1,1)\right]$.
(ii) Determinare $f^{-1}\{(0,0,0)\}$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x,y,z,t) \quad &= \quad (0,0,x-y+z-t,0) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.
(ii) Dire se tale endomorfismo è iniettivo.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,0,0) \qquad Q \equiv (0,1,0) \qquad R \equiv (1,1,1) \qquad r : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e determinare il piano α che li contiene.
(ii) Determinare la retta l passante per P e Q. Calcolare la distanza tra le rette l e r.
(iii) Determinare la retta m per P ortogonale e incidente r.
(iv) Verificare che le rette r e s sono sghembe e calcolare $d(r,s)$.