Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 13 Settembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = L[(1,0,1,0),(0,1,1,0),(-1,1,0,0)] \qquad K^{\perp} = \{(\alpha,0,0,0) \mid \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(ii) Determinare una base di K e una base di $H \cap K$.
(iii) Ortonormalizzare una base di H.

(i) E' facile osservare che $(0,1,1,0) - (1,0,1,0) = (-1,1,0,0)$, dunque il sistema $S = [(1,0,1,0),(0,1,1,0),(-1,1,0,0)]$ è linearmente dipendente, una base di H è costituita dal sistema $T = [(1,0,1,0),(0,1,1,0)]$, una rappresentazione cartesiana si determina utilizzando il teorema degli orlati:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$, sappiamo che la sottomatrice $M^{1,2}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 e i due orlati devono avere determinante nullo.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$, ovvero $x + y - z = 0$ e $t = 0$. In sintesi $H = \{(x,y,z,t) \mid x + y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$.

(ii) $K^{\perp} = \{(\alpha,0,0,0) \mid \ \alpha \in \mathbb{R}\} = K^{\perp} = \{\alpha(1,0,0,0) \mid \ \alpha \in \mathbb{R}\} = L[(1,0,0,0)]$, dunque $K = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t) \cdot (1,0,0,0) = 0\}$, in sintesi $K = \{(x,y,z,t) \mid x = 0\}$. Una base di K è data dal sistema $R = [(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$.

Una base di $H \cap K$ si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo:

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ t = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, la matrice associata a tale sistema lineare omogeneo è la seguente: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,il rango di tale matrice è 3 e un generatore dello spazio delle soluzioni si ottiene nel seguente modo:

$$u = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0,1,1,0)$$

, in sintesi possiamo dire che $N = [(0,1,1,0)]$ è una base di $H \cap K$.

(iii) Consideriamo la base $T = [(1,0,1,0),(0,1,1,0)]$ di H :
$u_1 = (1,0,1,0)$

$$u_2 = (0,1,1,0) - \frac{(0,1,1,0) \cdot (1,0,1,0)}{(1,0,1,0) \cdot (1,0,1,0)}(1,0,1,0) = (0,1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

La base $\overline{T} = [(1,0,1,0),(-1,2,1,0)]$ è una base ortogonale di H, la base $\overline{N} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)\right]$ è una base ortonormale di H.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 0 \\ kx + y = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Siamo in presenza di un sistema lineare parametrico non omogeneo di 4 equazioni in 3 variabili. Ricordate che tali sistemi lineari meritano un'attenzione particolare (sono sistemi lineari di $n+1$ equazioni lineari in n variabili). Se la matrice completa ha rango 4, il sistema lineare è incompatibile. Scriviamo la matrice completa del sistema lineare:
$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, utilizzando la regola di Laplace possiamo calcolare il suo determinante secondo la terza colonna e successivamente Sarrus: $|M| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} = -k-1$, ovvio che se $k \neq -1$ il rango della matrice completa è 4 e quello della matrice incompleta è al più 3. Per il teorema di Rouchè-Capelli possiamo concludere che il sistema lineare è incompatibile, dunque se $k \neq -1 \Longrightarrow S_k = \varnothing$.

Se $k = -1$ la matrice del sistema lineare diventa: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, applicando Gauss-Jordan si ha: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il sistema lineare equivalente diventa:
$\begin{cases} x - y = 1 \\ -y - z = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$. Possiamo concludere che $S_{-1} = \{(1, 0, -1)\}$.

3. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle basi $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $B' = ((0,1,1),(1,0,0),(0,0,1))$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e $K\mathrm{er} f$.
(ii) Determinare $f^{-1}(0,0,0)$ (controimmagine del vettore nullo).

(i) Studiando la matrice A_f in relazione al suo rango e al sistema omogeneo ad essa associato è possibile avere informazioni sull'immagine e sul nucleo dell'applicazione lineare.

E' possibile dare una risposta ai quesiti costruendo la legge dell'applicazione lineare. Tale costruzione si basa sul ruolo che rivestono le colonne della matrice A_f rispetto alla base assegnata, a tal proposito si possono eseguire gli stessi passaggi proposti nella soluzione del 5 Luglio 2103.

Le colonne della matrice A_f sono le componenti rispetto alla base assegnata di un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$. Si osserva facilmente che la matrice A_f ha determinante nullo, le prime due colonne sono indipendenti e quindi possiamo affermare che i vettori:
$(0,1,1) = 1 \cdot (0,1,1) + 0 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1)$
e
$(1,0,1) = 0 \cdot (0,1,1) + 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1)$

sono una base di $\operatorname{Im} f$.

Possiamo concludere che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e $S = [(0,1,1),(1,0,1)]$ è una base.

Per studiare il $K\,\mathrm{erf}$ dobbiamo considerare il sistema lineare omogeneo avente per matrice dei coefficienti $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che tale matrice ha determinante nullo e il suo rango è 2. Prendiamo in considerazione la prima e la seconda riga:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, siamo in presenza di un sistema lineare omogeneo con 2 equazioni in 3 variabili e il rango della matrice è 2.

Come al solito una base è data dal vettore: $u = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1,1,1)$.

Ricordiamo che quest'ultimo vettore trovato rappresenta le componenti nella base $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ del vettore che genera $K\,\mathrm{erf}$.

Il vettore che genera il nucleo è proprio $(-1,1,1)$ in quanto la base è quella canonica.
Possiamo concludere che $K\,\mathrm{erf} = L[(-1,1,1)]$.

(ii) Interpretando il ruolo di A_f rispetto alla base B, si ha:

Questo punto è in stretto legame con quanto sviluppato nell'ultima parte del punto precedente. In base alla definizione $f^{-1}(0,0,0)$ rappresenta la controimmagine del vettore nullo e quindi i vettori (x,y,z) che si "trasformano" nel vettore nullo, in altre parole $f^{-1}(0,0,0) = K\,\mathrm{erf} = L[(-1,1,1)]$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (2x - z, x + y - z, z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(i) Consideriamo una base a piacere e senza grosse esitazioni prenderemo quella canonica:
$f(1,0,0) = (2,1,0)$;
$f(0,1,0) = (0,1,0)$;
$f(0,0,1) = (-1,-1,1)$;
La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne i vettori immagine dei vettori della base canonica:
$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \\ p(\lambda) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, si ha:

$A_f - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{x - z = 0$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\{x = z$

$V_1 = \{(z, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 0)$, quindi $V_1 = L[(1, 0, 1), (0, 1, 0)]$. A questo punto già possiamo concludere che l'endomorfismo è diagonalizzabile, l'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ è regolare e l'altro autovalore $\lambda_1 = 2$ essendo una radice semplice è sicuramente regolare.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = 2$, si ha:

$A_f - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$V_2 = \{(x, x, 0)$ con $z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 1, 0)$, quindi $V_2 = L[(1, 1, 0)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio. Vi ricordo che la matrice P non è univocamente determinata, dipende da quali vettori abbiamo scelto nei relativi autospazi.

In ogni caso la matrice P verifica la seguente relazione: $P^{-1} A_f P = D$ dove D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Una base di autovettori è il seguente sistema: $T = [(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)]$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-2, 0, 1) \qquad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Provare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r, s)$.

(ii) Deterrminare la retta t per P incidente r e s.

(iii) Deterrminare la retta l per P incidente e ortogonale a r.

(iv) Deterrminare il piano π per P parallelo a r e s.

(i) Si trova facilmente che la direzione di r è data da $\overrightarrow{r} = (1, 0, 1)$. I parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (0, 1, 1)$, le rette non sono parallele. Si prova facilmente che le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili, dunque le rette sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$.

La retta ortogonale è incidente le due rette assegnate si può determinare come intersezione di due piani. Il primo α_1 che contiene la retta r e la direzione della normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette, il secondo α_2 che contiene la retta s e la direzione della normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette.

Piano per un punto P_r arbitrario di r e contenente le direzioni $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{n}$: $P_r \equiv (1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad &: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \alpha_1 \quad &: \quad x - 2y - z = 3 \end{aligned}$$

Piano per un punto Q_s arbitrario di s e contenente le direzioni $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{n}$: $Q_s \equiv (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \quad &: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \alpha_2 \quad &: \quad 2x - y + z = 2 \end{aligned}$$

La retta incidente e ortogonale sarà l'intersezione di questi ultimi due piani: $n : \begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$.

Per calcolare la distanza tra le due rette, determineremo un piano φ passante per una delle due rette (ad esempio la retta r) e parallelo ad s e nel passaggio successivo la distanza di un qualsiasi punto di s dal piano φ, questo valore ci darà la distanza tra le due rette.

Piano per un punto P_r arbitrario di r e contenente le direzioni $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$: $P_r \equiv (1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \varphi \quad &: \quad x + y - z = 0 \end{aligned}$$

Prendiamo un punto a piacere di s ad esempio $Q_s \equiv (1, 1, 1)$:

$$\varphi : x + y - z = 0$$

$$d(Q_s, \varphi) = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(ii) La retta cercata è l'intersezione di due piani:
(a) Piano β_1 per $P \equiv (-2, 0, 1)$ contenente le direzioni $\overrightarrow{PP_r} = (3, -1, -1)$ e $\overrightarrow{r}$

$$\beta_1 \quad : \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta_1 \quad : \quad x + 4y - z = -3$$

(b) Piano β_2 per $P \equiv (-2, 0, 1)$ contenente le direzioni $\overrightarrow{PQ_s} = (3, 1, 0)$ e $\overrightarrow{s}$

$$\beta_2 \quad : \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta_2 \quad : \quad x - 3y + 3z = 1$$

La retta cercata è $t : \begin{cases} x + 4y - z = -3 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$.

(iii) La retta cercata è intersezione del piano β_1 e del piano γ per P e ortogonale a r :

$$\gamma : 1(x+2) + 0(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$\gamma : x + z = -1$$

La retta cercata è $l : \begin{cases} x + 4y - z = -3 \\ x + z = -1 \end{cases}$.

(iv) Il piano cercato è quello per P contenente le direzioni $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$:

$$\pi \quad : \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \quad : \quad x + y - z = -3$$