

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 13 Settembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = L[(0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, -1)] \quad K^\perp = \{(0, 0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

- (i) Determinare una rappresentazione cartesiana di H .
- (ii) Determinare una base di K e una base di $H \cap K$.
- (iii) Ortonormalizzare una base di H .

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + kz = 1 \\ x + y = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

- (i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle basi $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $B' = ((0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base di $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
- (ii) Determinare $f^{-1}(0, 0, 0)$ (controimmagine del vettore nullo).

4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (x - 3z, 3x - 2y - 3z, -2z)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f .

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (2, 0, -1) \quad r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

- (i) Provare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente a r e s . Calcolare $d(r, s)$.
- (ii) Determinare la retta t per P incidente a r e s .
- (iii) Determinare la retta l per P incidente e ortogonale a r .
- (iv) Determinare il piano π per P parallelo a r e s .