Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 13 Settembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = L[(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,-1,0)] \qquad K^{\perp} = \{(0,0,\alpha,0) \mid \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(ii) Determinare una base di K e una base di $H \cap K$.
(iii) Ortonormalizzare una base di H.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 1 \\ x - ky = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle basi $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $B' = ((0,0,1),(1,0,0),(1,1,0))$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}\, f$ e $K\mathrm{er} f$.
(ii) Determinare $f^{-1}(0,0,0)$ (controimmagine del vettore nullo).

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (x - z, -x + 2y - z, 2z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0,1,-2) \qquad r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Provare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r, s)$.
(ii) Deterrminare la retta t per P incidente r e s.
(iii) Deterrminare la retta l per P incidente e ortogonale a r.
(iv) Deterrminare il piano π per P parallelo a r e s.