

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 13 Settembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = L[(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0)] \quad K^\perp = \{(0, \alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

- (i) Determinare una rappresentazione cartesiana di  $H$ .
- (ii) Determinare una base di  $K$  e una base di  $H \cap K$ .
- (iii) Ortonormalizzare una base di  $H$ .

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 1 \\ kx - y = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

- (i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

3. La matrice dell'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rispetto alle basi  $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  e  $B' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ , è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base di  $\text{Im } f$  e  $\text{Ker } f$ .
- (ii) Determinare  $f^{-1}(0, 0, 0)$  (controimmagine del vettore nullo).

4. Assegnato il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) = (-2x + 3z, 3x + y - 3z, z)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo  $f$ , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base  $B$  di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_f$ .

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, -2, 1) \quad r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

- (i) Provare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe, determinare la retta normale e incidente a  $r$  e  $s$ . Calcolare  $d(r, s)$ .
- (ii) Determinare la retta  $t$  per  $P$  incidente a  $r$  e  $s$ .
- (iii) Determinare la retta  $l$  per  $P$  incidente e ortogonale a  $r$ .
- (iv) Determinare il piano  $\pi$  per  $P$  parallelo a  $r$  e  $s$ .