Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 13 Settembre 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H = L[(1,0,1,0),(0,1,1,0),(-1,1,0,0)] \qquad K^\perp = \{(\alpha,0,0,0) \mid \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(ii) Determinare una base di K e una base di $H \cap K$.
(iii) Ortonormalizzare una base di H.

2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 0 \\ kx + y = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rispetto alle basi $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $B' = ((0,1,1),(1,0,0),(0,0,1))$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}\, f$ e $K\mathrm{er}f$.
(ii) Determinare $f^{-1}(0,0,0)$ (controimmagine del vettore nullo).

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (2x - z, x + y - z, z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base B di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-2,0,1) \qquad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Provare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r,s)$.
(ii) Deterrminare la retta t per P incidente r e s.
(iii) Deterrminare la retta l per P incidente e ortogonale a r.
(iv) Deterrminare il piano π per P parallelo a r e s.