Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 12 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$H_\lambda = [(1,0,0),(0,-1,-1),(\lambda{-}2,-2,\lambda)]$ $\quad K^\perp = \{(\alpha-\beta,-\alpha+\beta,0) \mid \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ $\quad W_t = [(-t+1,-1,t)]$ con $t \in \mathbb{R}$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ H_λ è legato, per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(H_\lambda)$.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di K.
(iii) Determinare una base e la dimensione di $L(H_\lambda) \cap K$ quando il sistema H_λ è legato.
(iv) Dire per quali valori $t \in \mathbb{R}$ $L(W_t) + K$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$.

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema H_λ consideriamo la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$, applicando la regola di Laplace alla prima riga si ottiene che $|M_\lambda| = -\lambda - 2$.

Possiamo concludere che il sistema H_λ è legato $\iff -\lambda - 2 = 0 \iff \lambda = -2$. Possiamo scrivere $H_{-2} = [(1,0,0),(0,-1,-1),(-4,-2,-2)]$, un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema H_{-2} possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema $T = [(1,0,0),(0,-1,-1)]$ è una base del sottospazio vettoriale $L(H_{-2})$.

$L(H_{-2}) = L\,[(1,0,0),(0,-1,-1)]$. Con facili calcoli si trova che $L(H_{-2}) = \{(x,y,z) \mid y - z = 0\}$.

(ii) Sappiamo che $K^\perp = \{(\alpha-\beta,-\alpha+\beta,0) \mid \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha(1,-1,0) + \beta(-1,1,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, dunque $K^\perp$ è generato dal sistema linearmete dipendente $T = [(1,-1,0),(-1,1,0)]$. Una base di $K^\perp$ è data dal sistema $R = [(1,-1,0)]$ e una rappresentazione cartesiana di K è la seguente: $K = \{(x,y,z) \mid x - y = 0\}$.

(iii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova: $L(H_{-2}) \cap K = \{(x,y,z) \mid y - z = 0 \text{ e } \ x - y = 0\}$. Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$. Con facili calcoli si trova che il vettore $u = (1,1,1)$ è una base di $L(H_{-2}) \cap K$.

(iv) Sappiamo che K ha dimensione 2 e una sua base è data dal sistema $N = [(1,1,0),(0,0,1)]$, affinchè $L(W_t) + K$ sia un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$ deve accadere che $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -t+1 & -1 & t \end{vmatrix} = 0 \iff 2 - t = 0 \iff t = 2$.

2. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili x, y, z, t:

$$\begin{cases} y = 0 \\ kx - y - z + t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + (k+1)y + t = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 variabili. La matrice del sistema lineare è la seguente: $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ovvio che se $|M| \neq 0$ il sistema lineare ammette solamente la soluzione banale. Nel nostro caso $|M_k| \neq 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & k+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff k-3 \neq 0 \iff k \neq 3$ e quindi $S = \{(0,0,0,0)\}$. Se $k=3$ esistono soluzioni non banali e poichè in tal caso la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il rango di tale matrice è 3 in quanto si prova facilmente che le prime tre righe sono linearmente indipendenti. In questo caso il sistema lineare è equivalente ad un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con matrice dei coefficienti avente rango 3.

Una base del sottospazio vettoriale soluzione è data dal seguente vettore:

$$u = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,0,1,-2)$$, in forma compatta $S = L[(1,0,1,-2)]$.

3. Costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(*) $H = L[(0,0,1),(1,-1,0)]$ è l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -2$ e $K\text{erf} = L[(0,1,0)]$.

La nostra applicazione lineare deve verificare le condizioni:
$f(0,0,1) = -2(0,0,1) = (0,0,-2)$

$f(1,-1,0) = -2(1,-1,0) = (-2,2,0)$
$f(0,1,0) = (0,0,0)$

Sappiamo dalla teoria che esiste un'unica applicazione lineare che verifica le condizioni precedenti (osserviamo che il sistema $[(0,0,1),(1,-1,0),(0,1,0)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$).
Ora $(x,y,z) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(0,1,0) \iff (x,y,z) = (\beta, -\beta+\gamma, \alpha) \iff$
$$\begin{cases} \beta = x \\ -\beta+\gamma = y \\ \alpha = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = x \\ \gamma = x+y \end{cases}$$

Possiamo scrivere $f(x,y,z) = f[\alpha(0,0,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(0,1,0)] = f[z(0,0,1) + x(1,-1,0) + (x+y)(0,1,0)] =$
$= zf(0,0,1) + xf(1,-1,0) + (x+y)f(0,1,0) = z(0,0,-2) + x(-2,2,0) + (x+y)(0,0,0) =$
$(-2x, 2x, -2z)$.

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x,y,z) = (-2x, 2x, -2z)$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_\lambda \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_\lambda(x,y,z) \quad &= \quad (2x + (\lambda-2)z, 3x - y + (\lambda-2)\,z, \lambda z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_λ solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_λ}. (STUDIARE A PIACERE UN SOLO CASO)

(i) La matrice che rappresenta f_λ nella base canonica è la seguente: $A_{f_\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda-2 \\ 3 & -1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, sarà $A_{f_\lambda} - tI = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & \lambda-2 \\ 3 & -1-t & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda-t \end{pmatrix}$ e

quindi $p_\lambda(t) = |A_{f_\lambda} - tI| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & \lambda-2 \\ 3 & -1-t & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda-t \end{vmatrix} = (-1-t)(2-t)(\lambda-t)$ (sviluppare il determinate con Laplace utilizzando la seconda colonna).

Determiniamo gli autovalori: $(-1-t)(2-t)(\lambda-t) = 0 \Longleftrightarrow t_1 = -1, t_2 = 2, t_3 = \lambda$.

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $\lambda = 2$ o $\lambda = -1$.

<u>Sia $\lambda = 2$</u>, in questo caso $t_1 = -1$, $t_2 = t_3 = 2$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $t_2 = t_3 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_{f_2} - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_2 = t_3 = 2$, si ha:

$A_{f_2} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_2} - 2I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema: $\left\{ x - y = 0 \right.$.

$V_2 = \{(y, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (0,0,1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $t_2 = t_3 = 2$ è $V_2 = [(1,1,0),(0,0,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_2} + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_1 = -1$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_2} + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$V_{-1} = \{(0, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0,1,0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $t_1 = -1$ è $V_{-1} = [(0,1,0)]$.

La matrice diagonalizzante la A_{f_2} è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $\lambda = 2$ è la seguente: $B = [(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)]$.

Si osserva che anche per $\lambda = -1$ l'endomorfismo è diagonalizzabile. (Era sufficiente svolgere uno dei due casi, $\lambda = 2$ o $\lambda = -1$).

Per completezza vediamo anche il caso $\lambda = -1$.

Sia $\underline{\lambda = -1}$, in questo caso $t_2 = 2$, $t_1 = t_3 = -1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $t_1 = t_3 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_1 = t_3 = -1$, si ha:

$$A_{f_{-1}} - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_{-1}} - I) = 1 \Longrightarrow \text{l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:}$$

$\{ \; x - z = 0 \;$.

$V_{-1} = \{(z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $t_1 = t_3 = -1$ è $V_{-1} = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_{-1}} - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_2 = 2$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_{-1}} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} .$$

$V_2 = \{(y, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 1, 0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $t_2 = 2$ è $V_2 = [(1, 1, 0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_{-1}}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice P che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $\lambda = -1$ è la seguente: $B = [(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)]$.

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 1, 0) \qquad r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2y + z = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad \pi : x + z = 1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano α che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s.

(ii) Determinare la retta l per P ortogonale a r e s.

(iii) Il piano β per s ortogonale a π.

(iv) La retta m per P incidente e ortogonale a r.

(i) La retta r ha direzione individuata dal vettore $\overrightarrow{r} = (1, -1, 1)$, la direzione di s si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\overrightarrow{s} = (3, -1, 2)$.

Prendiamo un punto a piacere su $r : Q \equiv (-2, -1, 0)$, prendiamo un punto a piacere su $s : R \equiv (5, 0, 3)$. La direzione $\overrightarrow{QR} = (7, 1, 3)$.

Osserviamo che $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ e quindi le rette sono complanari e sono incidenti perchè non hanno la stessa direzione.

Il piano che li contiene è il seguente (piano per Q che contiene le direzioni di r e s):

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y - 2z = -1$$

In forma compatta $\alpha \quad : \quad x - y - 2z = -1.$

(ii) Una direzione normale $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ alle due rette deve soddisfare le condizioni: $(a, b, c) \cdot (1, -1, 1) = 0$ e $(a, b, c) \cdot (3, -1, 2) = 0.$

Ci si rende facilmente conto che una tale direzione è quella normale al piano che contiene le due rette r e s, quindi $\overrightarrow{n} = (1, -1, -2).$

Un'equazione della retta cercata è la seguente: $l : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2t \end{cases}$ e una forma cartesiana della stessa retta è la seguente: $l : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$.

(iii) Il piano cercato deve contenere un punto di s, la direzione di s e la direzione normale al piano π. Una sua equazione è la seguente:

$$\beta \quad : \quad \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x + y - z = 2$$

In forma compatta $\beta \quad : \quad x + y - z = 2.$

(iv) Consideriamo il generico punto di r che indichiamo con $Q_t = (-2 + t, -1 - t, t)$ e calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ_t} = (t - 1, -t - 2, t)$ e imponiamo che la terna delle componenti di tale vettore sia ortogonale alla direzione di r :

$(t - 1, -t - 2, t) \cdot (1, -1, 1) = 0 \Longleftrightarrow 3t + 1 = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. Concludiamo che la direzione della retta da determinare è $\overrightarrow{PQ_{-\frac{1}{3}}} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right) \sim (4, 5, 1)$. La retta m ha equazione parametrica: $m : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + 5t \\ z = t \end{cases}$, una rappresentazione cartesiana è la seguente: $m : \begin{cases} x - 4z = -1 \\ y - 5z = 1 \end{cases}$.