# Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 12 Luglio 2013

**Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)** Cognome e Nome__________________________________

**1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$H_\lambda = [(1,0,0),(0,1,-1),(\lambda+2,1,-\lambda)]$ $\quad K^\perp = \{(\alpha-\beta,\alpha-\beta,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ $\quad W_t = [(t+1,1,-t)]$ con $t \in \mathbb{R}$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ $H_\lambda$ è legato, per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(H_\lambda)$.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $K$.
(iii) Determinare una base e la dimensione di $L(H_\lambda) \cap K$ quando il sistema $H_\lambda$ è legato.
(iv) Dire per quali valori $t \in \mathbb{R}$ $L(W_t) + K$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$.

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema $H_\lambda$ consideriamo la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda+2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, applicando la regola di Laplace alla prima riga si ottiene che $|M_\lambda| = -\lambda + 1$.

Possiamo concludere che il sistema $H_\lambda$ è legato $\Longleftrightarrow -\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1$. Possiamo scrivere $H_1 = [(1,0,0),(0,1,-1),(3,1,-1)]$ , un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema $H_1$ possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema $T = [(1,0,0),(0,1,1)]$ è una base del sottospazio vettoriale $L(H_1)$.

$L(H_1) = L\,[(1,0,0),(0,1,-1)]$ . Con facili calcoli si trova che $L(H_1) = \{(x,y,z) \mid y + z = 0\}$.

(ii) Sappiamo che $K^\perp = \{(\alpha-\beta,\alpha-\beta,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha(1,1,0) + \beta(-1,-1,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, dunque $K^\perp$ è generato dal sistema linearmete dipendente $T = [(1,1,0),(-1,-1,0)]$ . Una base di $K^\perp$ è data dal sistema $R = [(1,1,0)]$ e una rappresentazione cartesiana di $K$ è la seguente: $K = \{(x,y,z) \mid x + y = 0\}$.

(iii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova: $L(H_1) \cap K = \{(x,y,z) \mid y + z = 0 \text{ e } x + y = 0\}$. Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ . Con facili calcoli si trova che il vettore $u = (1,-1,1)$ è una base di $L(H_1) \cap K$.

(iv) Sappiamo che $K$ ha dimensione 2 e una sua base è data dal sistema $N = [(1,-1,0),(0,0,1)]$ , affinchè $L(W_t) + K$ sia un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$ deve accadere che $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t+1 & 1 & -t \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -t-2 = 0$ $\Longleftrightarrow t = -2$.

**2**. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili $x, y, z, t$:

$$\begin{cases} t = 0 \\ kx - y + z + t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y + (k+1)t = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 variabili. La matrice del sistema lineare è la seguente: $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$

Ovvio che se $|M| \neq 0$ il sistema lineare ammette solamente la soluzione banale. Nel nostro caso $|M_k| \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -k-3 \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -3$ e quindi $S = \{(0,0,0,0)\}$. Se $k = -3$ esistono soluzioni non banali e poichè in tal caso la matrice $M_{-3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, il rango di tale matrice è 3 in quanto si prova facilmente che le prime tre righe sono linearmente indipendenti. In questo caso il sistema lineare è equivalente ad un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in $4$ variabili con matrice dei coefficienti avente rango 3.

Una base del sottospazio vettoriale soluzione è data dal seguente vettore:

$u = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,-2,1,0)$, in forma compatta $S = L[(1,-2,1,0)]$.

**3**. Costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

**(*)** $H = L[(1,0,0),(0,-1,1)]$ è l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 2$ e $K\,\mathrm{erf} = L[(0,1,0)]$.

La nostra applicazione lineare deve verificare le condizioni:
$f(1,0,0) = 2(1,0,0) = (2,0,0)$

$f(0,-1,1) = 2(0,-1,1) = (0,-2,2)$
$f(0,1,0) = (0,0,0)$

Sappiamo dalla teoria che esiste un'unica applicazione lineare che verifica le condizioni precedenti (osserviamo che il sistema $[(1,0,0),(0,-1,1),(0,1,0)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$).

Ora $(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,-1,1) + \gamma(0,1,0) \Longleftrightarrow (x,y,z) = (\alpha, -\beta+\gamma, \beta) \Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha = x \\ -\beta+\gamma = y \\ \beta = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = z \\ \gamma = y+z \end{cases}$

Possiamo scrivere $f(x,y,z) = f[\alpha(1,0,0)+\beta(0,-1,1)+\gamma(0,1,0)] = f[x(1,0,0)+z(0,-1,1)+(y+z)(0,1,0)] =$
$= xf(1,0,0)+zf(0,-1,1)+(y+z)f(0,1,0) = x(2,0,0)+z(0,-2,2)+(y+z)(0,0,0) = (2x,-2z,2z)$.

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x,y,z) = (2x,-2z,2z)$.

**4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_\lambda &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_\lambda(x,y,z) &= (2x+(2-\lambda)z, -x+y+(\lambda-2)\,z, \lambda z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di $f_\lambda$ solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice $P$ che diagonalizza $A_{f_\lambda}$. (STUDIARE A PIACERE UN SOLO CASO)

(i) La matrice che rappresenta $f_\lambda$ nella base canonica è la seguente: $A_{f_\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-\lambda \\ -1 & 1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, sarà $A_{f_\lambda} - tI = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 2-\lambda \\ -1 & 1-t & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda-t \end{pmatrix}$ e

quindi $p_\lambda(t) = |A_{f_\lambda} - tI| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 2-\lambda \\ -1 & 1-t & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(\lambda-t)$ (sviluppare il determinate con Laplace utilizzando la seconda colonna).

Determiniamo gli autovalori: $(1-t)(2-t)(\lambda-t) = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 1, t_2 = \lambda, t_3 = 2.$

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi $\lambda = 2$ o $\lambda = 1$.

<u>Sia $\lambda = 2$</u>, in questo caso $t_3 = 1$, $t_1 = t_2 = 2$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $t_1 = t_2 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_{f_2} - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_1 = t_2 = 2$, si ha:

$A_{f_2} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_2} - 2I) = 1 \Longrightarrow$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema: $\{\ x + y = 0$ .

$V_2 = \{(-y, y, z) \text{ con } x, y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 0, 1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $t_1 = t_2 = 2$ è $V_2 = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_2} - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_3 = 1$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$A_{f_2} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ .

$V_1 = \{(0, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a $t_3 = 1$ è $V_1 = [(0, 1, 0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_2}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice $P$ che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $\lambda = 2$ è la seguente: $B = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)]$ .

Si osserva che anche per $\lambda = 1$ l'endomorfismo è diagonalizzabile. (Era sufficiente svolgere uno dei due casi, $\lambda = 2$ o $\lambda = 1$).

Per completezza vediamo anche il caso $\lambda = 1$.

Sia $\underline{\lambda = 1}$, in questo caso $t_3 = 2$, $t_1 = t_2 = 1$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $t_1 = t_2 = 1$.

Utilizzando la matrice $A_{f_1} - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_1 = t_2 = 1$, si ha:

$$A_{f_1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A_{f_1} - I) = 1 \Longrightarrow$$ l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema: $\left\{ \; x + z = 0 \right.$ .

$V_1 = \{(-z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (-1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 0)$, quindi l'autospazio corrispondente a $t_1 = t_2 = 1$ è $V_1 = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_1} - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $t_1 = 2$ (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_1} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} .$$

$V_2 = \{(-y, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (-1, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a $t_1 = 2$ è $V_2 = [(-1, 1, 0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_1}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice $P$ che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore $\lambda = 1$ è la seguente: $B = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 0)]$ .

**5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, 0) \qquad r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y + 2z = 3 \\ x + 3z = 5 \end{cases} \qquad \pi : x - z = -1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se le rette $r$ e $s$ sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano $\alpha$ che le contiene e se sghembe la retta $n$ ortogonale e incidente le rette $r$ e $s$.

(ii) Determinare la retta $l$ per $P$ ortogonale a $r$ e $s$.

(iii) Il piano $\beta$ per $s$ ortogonale a $\pi$.

(iv) La retta $m$ per $P$ incidente e ortogonale a $r$.

(i) La retta $r$ ha direzione individuata dal vettore $\overrightarrow{r} = (1, 1, -1)$, la direzione di $s$ si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e quindi $\overrightarrow{s} = (3, 2, -1)$.

Prendiamo un punto a piacere su $r : Q \equiv (-2, 0, -1)$, prendiamo un punto a piacere su $s : R \equiv (5, 3, 0)$. La direzione $\overrightarrow{QR} = (7, 3, 1)$.

Osserviamo che $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e quindi le rette sono complanari e sono incidenti perchè non hanno la stessa direzione.

Il piano che li contiene è il seguente (piano per $Q$ che contiene le direzioni di $r$ e $s$):

$$\alpha \quad : \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - 2y - z = -1$$

In forma compatta $\alpha \quad : \quad x - 2y - z = -1.$

(ii) Una direzione normale $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ alle due rette deve soddisfare le condizioni: $(a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0$ e $(a, b, c) \cdot (3, 2, -1) = 0.$

Ci si rende facilmente conto che una tale direzione è quella normale al piano che contiene le due rette $r$ e $s$, quindi $\overrightarrow{n} = (1, -2, -1).$

Un'equazione della retta cercata è la seguente: $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ e una forma cartesiana della stessa retta è la seguente: $l : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$.

(iii) Il piano cercato deve contenere un punto di $s$, la direzione di $s$ e la direzione normale al piano $\pi$. Una sua equazione è la seguente:

$$\beta \quad : \quad \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 2$$

In forma compatta $\beta \quad : \quad x - y + z = 2.$

(iv) Consideriamo il generico punto di $r$ che indichiamo con $Q_t = (-2 + t, t, -1 - t)$ e calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ_t} = (t - 3, t + 1, -1 - t)$ e imponiamo che la terna delle componenti di tale vettore sia ortogonale alla direzione di $r$ :

$(t - 3, t + 1, -1 - t) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Longleftrightarrow 3t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{3}$. Concludiamo che la direzione della retta da determinare è $\overrightarrow{PQ_{\frac{1}{3}}} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \sim (2, -1, 1)$ . La retta $m$ ha equazione parametrica: $m : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$ , una rappresentazione cartesiana è la seguente: $m : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ .