

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 12 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_\lambda = [(1, 0, 0), (0, -1, 1), (\lambda - 1, 1, \lambda)] \quad K^\perp = \{(\alpha - \beta, 0, -\alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad W_t = [(t + 2, 1, -t)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali  $\lambda \in \mathbb{R}$   $H_\lambda$  è legato, per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di  $L(H_\lambda)$ .

(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di  $K$ .

(iii) Determinare una base e la dimensione di  $L(H_\lambda) \cap K$  quando il sistema  $H_\lambda$  è legato.

(iv) Dire per quali valori  $t \in \mathbb{R}$   $L(W_t) + K$  è un sottospazio vettoriale proprio di  $\mathbb{R}^3$ .

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema  $H_\lambda$  consideriamo la matrice  $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,

applicando la regola di Laplace alla prima riga si ottiene che  $|M_\lambda| = -\lambda - 1$ .

Possiamo concludere che il sistema  $H_\lambda$  è legato  $\iff -\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = -1$ . Possiamo scrivere  $H_{-1} = [(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-2, 1, -1)]$ , un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema  $H_{-1}$  possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema  $T = [(1, 0, 0), (0, -1, 1)]$  è una base del sottospazio vettoriale  $L(H_{-1})$ .

$$L(H_{-1}) = L[(1, 0, 0), (0, -1, 1)]. \text{ Con facili calcoli si trova che } L(H_{-1}) = \{(x, y, z) \mid y + z = 0\}.$$

(ii) Sappiamo che  $K^\perp = \{(\alpha - \beta, 0, -\alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha(1, 0, -1) + \beta(-1, 0, 1)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , dunque  $K^\perp$  è generato dal sistema linearmente dipendente  $T = [(1, 0, -1), (-1, 0, 1)]$ . Una base di  $K^\perp$  è data dal sistema  $R = [(1, 0, -1)]$  e una rappresentazione cartesiana di  $K$  è la seguente:  $K = \{(x, y, z) \mid x - z = 0\}$ .

(iii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova:

$L(H_{-1}) \cap K = \{(x, y, z) \mid y + z = 0 \text{ e } x - z = 0\}$ . Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}. \text{ Con facili calcoli si trova che il vettore } u = (1, -1, 1) \text{ è una base di } L(H_{-1}) \cap K.$$

(iv) Sappiamo che  $K$  ha dimensione 2 e una sua base è data dal sistema  $N = [(1, 0, 1), (0, 1, 0)]$ , affinché

$$L(W_t) + K \text{ sia un sottospazio vettoriale proprio di } \mathbb{R}^3 \text{ deve accadere che } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t + 2 & 1 & -t \end{vmatrix} = 0 \iff -2t - 2 = 0$$

$$\iff t = -1.$$

2. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili  $x, y, z, t$ :

$$\begin{cases} z = 0 \\ kx + y - z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ x + y + (k + 1)z = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 variabili. La matrice del sistema

$$\text{lineare è la seguente: } M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ovvio che se  $|M| \neq 0$  il sistema lineare ammette solamente la soluzione banale. Nel nostro caso

$$|M_k| \neq 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff k-2 \neq 0 \iff k \neq 2 \text{ e quindi } S = \{(0, 0, 0, 0)\}. \text{ Se } k = 2 \text{ esistono}$$

soluzioni non banali e poichè in tal caso la matrice  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , il rango di tale matrice è 3 in

quanto si prova facilmente che le prime tre righe sono linearmente indipendenti. In questo caso il sistema lineare è equivalente ad un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con matrice dei coefficienti avente rango 3.

Una base del sottospazio vettoriale soluzione è data dal seguente vettore:

$$u = \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 0, 1), \text{ in forma compatta } S = L[(1, -1, 0, 1)].$$

3. Costruire un endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  che verifica la seguente condizione:

$$(*) H = L[(1, 0, 0), (1, 0, -1)] \text{ è l'autospazio associato all'autovalore } \lambda = 1 \text{ e } K \text{ erf} = L[(0, 1, 0)].$$

La nostra applicazione lineare deve verificare le condizioni:

$$f(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(1, 0, -1) = 1(1, 0, -1) = (1, 0, -1)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Sappiamo dalla teoria che esiste un'unica applicazione lineare che verifica le condizioni precedenti (osserviamo che il sistema  $[(1, 0, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 0)]$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ ).

$$\text{Ora } (x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, 0) \iff (x, y, z) = (\alpha + \beta, \gamma, -\beta) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \gamma = y \\ -\beta = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x + z \\ \beta = -z \\ \gamma = y \end{cases}$$

$$\text{Possiamo scrivere } f(x, y, z) = f[\alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, 0)] = f[(x+z)(1, 0, 0) - z(1, 0, -1) + y(0, 1, 0)] = (x+z)f(1, 0, 0) - zf(1, 0, -1) + yf(0, 1, 0) = (x+z)(1, 0, 0) - z(1, 0, -1) + y(0, 0, 0) = (x, 0, z).$$

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente:  $f(x, y, z) = (x, 0, z)$ .

4. Assegnato il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_\lambda(x, y, z) = (\lambda x + (1 - \lambda)z, (-\lambda - 2)x - 2y + (\lambda - 1)z, z)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di  $f_\lambda$  solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_{f_\lambda}$ . (STUDIARE A PIACERE UN SOLO CASO)

(i) La matrice che rappresenta  $f_\lambda$  nella base canonica è la seguente:  $A_{f_\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1-\lambda \\ -\lambda-2 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

sarà  $A_{f_\lambda} - tI = \begin{pmatrix} \lambda-t & 0 & 1-\lambda \\ -\lambda-2 & -2-t & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$  e

quindi  $p_\lambda(t) = |A_{f_\lambda} - tI| = \begin{vmatrix} \lambda-t & 0 & 1-\lambda \\ -\lambda-2 & -2-t & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (-2-t)(\lambda-t)(1-t)$  (sviluppare il determinante con Laplace utilizzando la seconda colonna).

Determiniamo gli autovalori:  $(-2-t)(\lambda-t)(1-t) = 0 \iff t_1 = -2, t_2 = \lambda, t_3 = 1$ .

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi  $\lambda = -2$  o  $\lambda = 1$ .

Sia  $\lambda = -2$ , in questo caso  $t_3 = 1, t_1 = t_2 = -2$ . Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $t_1 = t_2 = -2$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_{-2}} + 2I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_1 = t_2 = -2$ , si ha:

$$A_{f_{-2}} + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \rho(A_{f_{-2}} + 2I) = 1 \implies \text{l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:}$$

$$\begin{cases} 3z = 0 \end{cases}$$

$V_{-2} = \{(x, y, 0) \text{ con } x, y \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dai due vettori:  $u_1 = (1, 0, 0)$  e  $u_2 = (0, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_1 = t_2 = -2$  è  $V_{-2} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_{-2}} - I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_3 = 1$  (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_{-2}} - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$V_1 = \{(z, -z, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dal vettore:  $u_3 = (1, -1, 1)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_3 = 1$  è  $V_1 = [(1, -1, 1)]$ .

La matrice diagonalizzante la  $A_{f_{-2}}$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice  $P$  che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore  $\lambda = 2$  è la seguente:  $B = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)]$ .

Si osserva che anche per  $\lambda = 1$  l'endomorfismo è diagonalizzabile. (Era sufficiente svolgere uno dei due casi,  $\lambda = -2$  o  $\lambda = 1$ ).

Per completezza vediamo anche il caso  $\lambda = 1$ .

Sia  $\lambda = 1$ , in questo caso  $t_1 = -2, t_2 = t_3 = 1$ . Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $t_1 = t_2 = 1$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_1} - I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_2 = t_3 = 1$ , si ha:

$$A_{f_1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \rho(A_{f_1} - I) = 1 \implies \text{l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$$

$V_1 = \{(-y, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dai due vettori:  $u_1 = (-1, 1, 0)$  e  $u_2 = (0, 0, 1)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_2 = t_3 = 1$  è  $V_1 = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_1} + 2I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_1 = -2$  (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_1} + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$V_{-2} = \{(0, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dal vettore:  $u_3 = (0, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_1 = -2$  è  $V_{-2} = [(0, 1, 0)]$ .

La matrice diagonalizzante la  $A_{f_1}$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice  $P$  che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore  $\lambda = 1$  è la seguente:  $B = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)]$ .

**5.** Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2y - z = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad \pi : y + z = -1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se le rette  $r$  e  $s$  sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano  $\alpha$  che le contiene e se sghembe la retta  $n$  ortogonale e incidente le rette  $r$  e  $s$ .

(ii) Determinare la retta  $l$  per  $P$  ortogonale a  $r$  e  $s$ .

(iii) Il piano  $\beta$  per  $s$  ortogonale a  $\pi$ .

(iv) La retta  $m$  per  $P$  incidente e ortogonale a  $r$ .

(i) La retta  $r$  ha direzione individuata dal vettore  $\vec{r} = (-1, 1, 1)$ , la direzione di  $s$  si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  e quindi  $\vec{s} = (3, -1, -2)$ .

Prendiamo un punto a piacere su  $r$ :  $Q \equiv (1, 2, 0)$ , prendiamo un punto a piacere su  $s$ :  $R \equiv (2, 1, -1)$ . La direzione  $\vec{QR} = (1, -1, -1)$ .

Osserviamo che  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$  e quindi le rette sono complanari e sono incidenti perchè non hanno la stessa direzione.

Il piano che li contiene è il seguente (piano per  $Q$  che contiene le direzioni di  $r$  e  $s$ ):

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y + 2z = -1$$

In forma compatta  $\alpha : x - y + 2z = -1$ .

(ii) Una direzione normale  $\vec{n} = (a, b, c)$  alle due rette deve soddisfare le condizioni:  $(a, b, c) \cdot (-1, 1, 1) = 0$  e  $(a, b, c) \cdot (3, -1, -2) = 0$ .

Ci si rende facilmente conto che una tale direzione è quella normale al piano che contiene le due rette  $r$  e  $s$ , quindi  $\vec{n} = (1, -1, 2)$ .

Un'equazione della retta cercata è la seguente:  $l : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  e una forma cartesiana della stessa retta

è la seguente:  $l : \begin{cases} x + y = -1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$ .

(iii) Il piano cercato deve contenere un punto di  $s$ , la direzione di  $s$  e la direzione normale al piano  $\pi$ . Una sua equazione è la seguente:

$$\beta : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 3y + 3z = -4$$

In forma compatta  $\beta : x - 3y + 3z = -4$ .

(iv) Consideriamo il generico punto di  $r$  che indichiamo con  $Q_t = (1 - t, 2 + t, t)$  e calcoliamo le componenti del vettore  $\vec{PQ}_t = (2 - t, t + 2, t - 1)$  e imponiamo che la terna delle componenti di tale vettore sia ortogonale alla direzione di  $r$ :

$$(2 - t, t + 2, t - 1) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}$$

Concludiamo che la direzione della retta da determinare è  $\vec{PQ}_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right) \sim (5, 7, -2)$ . La retta  $m$  ha equazione parametrica:  $m : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -7t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ ,

una rappresentazione cartesiana è la seguente:  $m : \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 5z = 3 \end{cases}$ .