

# Esame di Geometria e Algebra

Matr. \_\_\_\_\_

Prova scritta 12 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome \_\_\_\_\_

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_\lambda = [(1, 0, 0), (0, 1, 1), (\lambda+1, -2, -\lambda)] \quad K^\perp = \{(\alpha - \beta, 0, \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad W_t = [(t-2, t, 1)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

(i) Dire per quali  $\lambda \in \mathbb{R}$   $H_\lambda$  è legato, per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di  $L(H_\lambda)$ .

(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di  $K$ .

(iii) Determinare una base e la dimensione di  $L(H_\lambda) \cap K$  quando il sistema  $H_\lambda$  è legato.

(iv) Dire per quali valori  $t \in \mathbb{R}$   $L(W_t) + K$  è un sottospazio vettoriale proprio di  $\mathbb{R}^3$ .

(i) Per studiare la dipendenza lineare del sistema  $H_\lambda$  consideriamo la matrice  $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \lambda+1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$ ,

applicando la regola di Laplace alla prima riga si ottiene che  $|M_\lambda| = -\lambda + 2$ .

Possiamo concludere che il sistema  $H_\lambda$  è legato  $\iff -\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 2$ . Possiamo scrivere  $H_2 = [(1, 0, 0), (0, 1, 1), (3, -2, -2)]$ , un tale sistema è linearmente dipendente, nel costruire il sottospazio vettoriale generato dal sistema  $H_2$  possiamo considerare due qualsiasi vettori di esso. Il sistema  $T = [(1, 0, 0), (0, 1, 1)]$  è una base del sottospazio vettoriale  $L(H_2)$ .

$$L(H_2) = L[(1, 0, 0), (0, 1, 1)]. \text{ Con facili calcoli si trova che } L(H_2) = \{(x, y, z) \mid y - z = 0\}.$$

(ii) Sappiamo che  $K^\perp = \{(\alpha - \beta, 0, \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha(1, 0, 1) + \beta(-1, 0, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , dunque  $K^\perp$  è generato dal sistema linearmente dipendente  $T = [(1, 0, 1), (-1, 0, -1)]$ . Una base di  $K^\perp$  è data dal sistema  $R = [(1, 0, 1)]$  e una rappresentazione cartesiana di  $K$  è la seguente:  $K = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ .

(iii) Avendo a disposizione le rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi vettoriali si trova:

$L(H_2) \cap K = \{(x, y, z) \mid y - z = 0 \text{ e } x + z = 0\}$ . Dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}. \text{ Con facili calcoli si trova che il vettore } u = (1, -1, -1) \text{ è una base di } L(H_2) \cap K.$$

(iv) Sappiamo che  $K$  ha dimensione 2 e una sua base è data dal sistema  $N = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$ , affinché

$$L(W_t) + K \text{ sia un sottospazio vettoriale proprio di } \mathbb{R}^3 \text{ deve accadere che } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t-2 & t & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 1 - t = 0 \iff$$

$$t = 1.$$

2. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili  $x, y, z, t$ :

$$\begin{cases} y = 0 \\ kx + y - z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 variabili. La matrice del sistema

$$\text{lineare è la seguente: } M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ovvio che se  $|M| \neq 0$  il sistema lineare ammette solamente la soluzione banale. Nel nostro caso

$$|M_k| \neq 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -k-2 \neq 0 \iff k \neq -2 \text{ e quindi } S = \{(0, 0, 0, 0)\}. \text{ Se}$$

$k = -2$  esistono soluzioni non banali e poichè in tal caso la matrice  $M_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , il rango di

tale matrice è 3 in quanto si prova facilmente che le prime tre righe sono linearmente indipendenti. In questo caso il sistema lineare è equivalente ad un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 variabili con matrice dei coefficienti avente rango 3.

Una base del sottospazio vettoriale soluzione è data dal seguente vettore:

$$u = \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, -1, 1), \text{ in}$$

forma compatta  $S = L[(1, 0, -1, 1)]$ .

3. Costruire un endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  che verifica la seguente condizione:

$$(*) H = L[(-1, 0, 0), (0, 1, -1)] \text{ è l'autospazio associato all'autovalore } \lambda = -1 \text{ e } K \text{ erf} = L[(0, 0, 1)].$$

La nostra applicazione lineare deve verificare le condizioni:

$$f(-1, 0, 0) = -1(-1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, -1) = -1(0, 1, -1) = (0, -1, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Sappiamo dalla teoria che esiste un'unica applicazione lineare che verifica le condizioni precedenti (osserviamo che il sistema  $[(-1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)]$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ ).

$$\text{Ora } (x, y, z) = \alpha(-1, 0, 0) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(0, 0, 1) \iff (x, y, z) = (-\alpha, \beta, -\beta + \gamma) \iff \begin{cases} -\alpha = x \\ \beta = y \\ -\beta + \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -x \\ \beta = y \\ \gamma = y + z \end{cases}$$

Possiamo scrivere  $f(x, y, z) = f[\alpha(-1, 0, 0) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(0, 0, 1)] = f[-x(-1, 0, 0) + y(0, 1, -1) + (y+z)(0, 0, 1)] = -xf(-1, 0, 0) + yf(0, 1, -1) + (y+z)f(0, 0, 1) = -x(1, 0, 0) + y(0, -1, 1) + (y+z)(0, 0, 0) = (-x, -y, y)$ .

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente:  $f(x, y, z) = (-x, -y, y)$ .

4. Assegnato il seguente endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ :

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_\lambda(x, y, z) = (\lambda x + (1-\lambda)z, (2-\lambda)x + 2y + (\lambda-1)z, z)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di  $f_\lambda$  solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice  $P$  che diagonalizza  $A_{f_\lambda}$ . (STUDIARE A PIACERE UN SOLO CASO)

(i) La matrice che rappresenta  $f_\lambda$  nella base canonica è la seguente:  $A_{f_\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2-\lambda & 2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , sarà

$$A_{f_\lambda} - tI = \begin{pmatrix} \lambda-t & 0 & 1-\lambda \\ 2-\lambda & 2-t & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\text{quindi } p_\lambda(t) = |A_{f_\lambda} - tI| = \begin{vmatrix} \lambda-t & 0 & 1-\lambda \\ 2-\lambda & 2-t & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(\lambda-t)(1-t) \text{ (sviluppare il determinante}$$

con Laplace utilizzando la seconda colonna).

Determiniamo gli autovalori:  $(2-t)(\lambda-t)(1-t) = 0 \iff t_1 = 2, t_2 = \lambda, t_3 = 1$ .

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo in presenza di radici multiple vuol dire studiare i casi  $\lambda = 2$  o  $\lambda = 1$ .

Sia  $\lambda = 2$ , in questo caso  $t_3 = 1, t_1 = t_2 = 2$ . Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $t_1 = t_2 = 2$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_2} - 2I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_1 = t_2 = 2$ , si ha:

$$A_{f_2} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \rho(A_{f_2} - 2I) = 1 \implies \text{l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:}$$

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases} .$$

$V_2 = \{(x, y, 0) \text{ con } x, y \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dai due vettori:  $u_1 = (1, 0, 0)$  e  $u_2 = (0, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_1 = t_2 = 2$  è  $V_2 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_2} - I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_3 = 1$  (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_2} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

$V_1 = \{(z, -z, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dal vettore:  $u_3 = (1, -1, 1)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_3 = 1$  è  $V_1 = [(1, -1, 1)]$ .

La matrice diagonalizzante la  $A_{f_2}$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice  $P$  che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore  $\lambda = 2$  è la seguente:  $B = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)]$ .

Si osserva che anche per  $\lambda = 1$  l'endomorfismo è diagonalizzabile. (Era sufficiente svolgere uno dei due casi,  $\lambda = 2$  o  $\lambda = 1$ ).

Per completezza vediamo anche il caso  $\lambda = 1$ .

Sia  $\lambda = 1$ , in questo caso  $t_1 = 2, t_2 = t_3 = 1$ . Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore  $t_1 = t_2 = 1$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_1} - I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_2 = t_3 = 1$ , si ha:

$$A_{f_1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \rho(A_{f_1} - I) = 1 \implies \text{l'autovalore è regolare e otteniamo il sistema:}$$

$$\{ x + y = 0 \} .$$

$V_1 = \{(-y, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dai due vettori:  $u_1 = (-1, 1, 0)$  e  $u_2 = (0, 0, 1)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_2 = t_3 = 1$  è  $V_1 = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ .

Utilizzando la matrice  $A_{f_1} - 2I$ , scriviamo il sistema omogeneo associato a  $t_1 = 2$  (autovalore semplice e quindi regolare), si ha:

$$A_{f_1} - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ -z = 0 \end{cases} .$$

$V_2 = \{(0, y, 0) \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$  e una sua base è costituita dal vettore:  $u_3 = (0, 1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a  $t_1 = 2$  è  $V_2 = [(0, 1, 0)]$ .

La matrice diagonalizzante la  $A_{f_1}$  è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice  $P$  che si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio non è unica e dipende dalle basi scelte nei relativi autospazi.

Una base di autovettori dell'endomorfismo relativamente al valore  $\lambda = 1$  è la seguente:  $B = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)]$ .

**5.** Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 0, -1) \quad r : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + 3z = -1 \end{cases} \quad \pi : x + y = -1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se le rette  $r$  e  $s$  sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano  $\alpha$  che le contiene e se sghembe la retta  $n$  ortogonale e incidente le rette  $r$  e  $s$ .

(ii) Determinare la retta  $l$  per  $P$  ortogonale a  $r$  e  $s$ .

(iii) Il piano  $\beta$  per  $s$  ortogonale a  $r$ .

(iv) La retta  $m$  per  $P$  incidente e ortogonale a  $r$ .

(i) La retta  $r$  ha direzione individuata dal vettore  $\vec{r} = (1, 1, 1)$ , la direzione di  $s$  si ottiene calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  e quindi  $\vec{s} = (3, 1, -1)$ .

Prendiamo un punto a piacere su  $r$ :  $Q \equiv (-2, 0, 1)$ , prendiamo un punto a piacere su  $s$ :  $R \equiv (-1, 0, 0)$ . La direzione  $\vec{QR} = (-1, 0, 1)$ .

Osserviamo che  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$  e quindi le rette sono complanari e sono incidenti perchè non hanno la stessa direzione.

Il piano che li contiene è il seguente (piano per  $Q$  che contiene le direzioni di  $r$  e  $s$ ):

$$\alpha : \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 2y + z = -1$$

In forma compatta  $\alpha : x - 2y + z = -1$ .

(ii) Una direzione normale  $\vec{n} = (a, b, c)$  alle due rette deve soddisfare le condizioni:  $(a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0$  e  $(a, b, c) \cdot (3, 1, -1) = 0$ .

Ci si rende facilmente conto che una tale direzione è quella normale al piano che contiene le due rette  $r$  e  $s$ , quindi  $\vec{n} = (1, -2, 1)$ .

Un'equazione della retta cercata è la seguente:  $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$  e una forma cartesiana della stessa retta

è la seguente:  $l : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - z = 2 \end{cases}$ .

(iii) Il piano cercato deve contenere un punto di  $s$ , la direzione di  $s$  e la direzione normale al piano  $\pi$ . Una sua equazione è la seguente:

$$\beta : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y + 2z = -1$$

In forma compatta  $\beta : x - y + 2z = -1$ .

(iv) Consideriamo il generico punto di  $r$  che indichiamo con  $Q_t = (-2 - t, -t, 1 - t)$  e calcoliamo le componenti del vettore  $\overrightarrow{PQ_t} = (t + 3, t, t - 2)$  e imponiamo che la terna delle componenti di tale vettore sia ortogonale alla direzione di  $r$ :

$$(t + 3, t, t - 2) \cdot (1, 1, 1) = 0 \iff 3t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{3}.$$

Concludiamo che la direzione della retta da determinare è  $\overrightarrow{PQ}_{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right) \sim (8, -1, -7)$ . La retta  $m$  ha equazione parametrica:

$$m : \begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = -t \\ z = -1 - 7t \end{cases}, \text{ una rappresentazione cartesiana è la seguente: } m : \begin{cases} x + 8y = 1 \\ 7y - z = 1 \end{cases}.$$