

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 12 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_\lambda = [(1, 0, 0), (0, 1, -1), (\lambda+2, 1, -\lambda)] \quad K^\perp = \{(\alpha - \beta, \alpha - \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad W_t = [(t+1, 1, -t)] \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

- (i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ H_λ è legato, per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(H_\lambda)$.
- (ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di K .
- (iii) Determinare una base e la dimensione di $L(H_\lambda) \cap K$ quando il sistema H_λ è legato.
- (iv) Dire per quali valori $t \in \mathbb{R}$ $L(W_t) + K$ è un sottospazio vettoriale proprio di \mathbb{R}^3 .

2. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili x, y, z, t :

$$\begin{cases} t = 0 \\ kx - y + z + t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y + (k+1)t = 0 \end{cases}$$

- (i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

$$(*) H = L[(1, 0, 0), (0, -1, 1)] \text{ è l'autospazio associato all'autovalore } \lambda = 2 \text{ e } K \text{ erf} = L[(0, 1, 0)].$$

4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_\lambda(x, y, z) = (2x + (2 - \lambda)z, -x + y + (\lambda - 2)z, \lambda z)$$

- (i) Studiare la diagonalizzabilità di f_λ solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_λ} . (STUDIARE A PIACERE UN SOLO CASO)

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, 0) \quad r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} y + 2z = 3 \\ x + 3z = 5 \end{cases} \quad \pi : x - z = -1$$

Risolvere i seguenti punti:

- (i) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano α che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s .
- (ii) Determinare la retta l per P ortogonale a r e s .
- (iii) Il piano β per s ortogonale a π .
- (iv) La retta m per P incidente e ortogonale a r .