Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 12 Luglio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_\lambda = [(1,0,0),(0,-1,1),(\lambda-1,1,\lambda)] \qquad K^\perp = \{(\alpha-\beta,0,-\alpha+\beta) \mid \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \qquad W_t = [(t+2,1,-t)] \text{ con } t\in\mathbb{R}$$

(i) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ H_λ è legato, per tali valori scrivere una rappresentazione cartesiana di $L(H_\lambda)$.
(ii) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di K.
(iii) Determinare una base e la dimensione di $L(H_\lambda) \cap K$ quando il sistema H_λ è legato.
(iv) Dire per quali valori $t \in \mathbb{R}$ $L(W_t) + K$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$.

2. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili x, y, z, t:

$$\begin{cases} z = 0 \\ kx + y - z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ x + y + (k+1)z = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(*) $H = L[(1,0,0),(1,0,-1)]$ è l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$ e $K\,\mathrm{erf} = L[(0,1,0)]$.

4. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f_\lambda \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_\lambda(x,y,z) \quad &= \quad (\lambda x + (1-\lambda)z, (-\lambda-2)x - 2y + (\lambda-1)\,z, z) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità di f_λ solo in presenza di radici multiple, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_λ}. (STUDIARE A PIACERE UN SOLO CASO)

5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1,0,1) \qquad r: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2y - z = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad \pi: y + z = -1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare se le rette r e s sono complanari o sghembe. Nel caso sia complanari determinare il piano α che le contiene e se sghembe la retta n ortogonale e incidente le rette r e s.
(ii) Determinare la retta l per P ortogonale a r e s.
(iii) Il piano β per s ortogonale a π.
(iv) La retta m per P incidente e ortogonale a r.