Programma di Geometria e Algebra

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)
Università degli Studi di Napoli, Federico II

---

1) INTRODUZIONE Nozione di applicazione tra insiemi: applicazioni iniettive, suriettive e biettive. Composizione di applicazioni, applicazioni invertibili. Operazione binaria su un insieme, proprietà delle operazioni: associativa, esistenza dell'elemento neutro, esistenza del simmetrico di un elemento, commutativa. Nozione di struttura algebrica: semigruppo, monoide, gruppo, anello,corpo e campo; esempi di tali strutture.

2) SPAZI VETTORIALI Operazione interna e operazione esterna su un insieme: coppie ordinate di numeri reali e polinomi di grado al più 2 in una variabile. Nozione di spazio vettoriale su un campo. Relazioni immediate valide in uno spazio vettoriale. Sistema di vettori, combinazione lineare di vettori, dipendenza e indipendenza lineare. Sistemi di generatori, spazi vettoriali finitamente generati, base di uno spazio vettoriale, sistemi di generatori minimali, sistemi indipendenti massimali e teorema di caratterizzazione delle basi. Lemma di Steinitz, equipotenza delle basi, dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato, estrazione di una base da un sistema di generatori e teorema di completamento di una base. Nozione di sottospazio vettoriale, intersezione di sottospazi vettoriali, sottospazio vettoriale somma, teorema di Grassmann. Sottospazio vettoriale generato da un sistema di vettori. Sottospazi vettoriali complementari, supplementari, somma diretta. (Dimostrazioni: Relazioni immediate valide in uno spazio vettoriale, l'intersezione di sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale, sottospazio vettoriale somma, un sistema che contiene il vettore nullo è linearmente dipendente, un sistema è linearmente dipendente se e solo se qualche vettore dipende dai rimanenti, le componenti di un vettore rispetto ad una base sono uniche).

3) APPLICAZIONI LINEARI Nozione di applicazione lineare, proprietà fondamentali di un'applicazione lineare. Alcuni tipi di applicazioni lineari: omomorfismi, monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi, endomorfismi, automorfismi. Nucleo e immagine di un'applicazioni lineari. Applicazione lineare e legame con il concetto dipendenza e indipendenza lineare, applicazione lineare definita su una base e poi estesa per linearità. Equazione dimensionale e isomorfismo di coordinazione. Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a due basi. (Dimostrazioni: Proprietà elementari di un'applicazione lineare, Kerf e Imf sono sottospazi vettoriali, f è un monomorfismo se e solo se Kerf=$\{0\}$, un'applicazione lineare conserva la dipendenza lineare, un monomorfismo conserva l'indipendenza lineare, S genera V$\Longrightarrow$f(S) genera Imf, equazione dimensionale, l'applicazione di coordinazione è un isomorfismo).

4) MATRICI La nozione di matrice su un insieme. Matrice rettangolare, quadrata, triangolare alta e bassa, diagonale, simmetrica, antisimmetrica. Operazioni sulle matrici: somma di matrici, prodotto righe per colonne e relative proprietà, trasposta di una matrice e struttura di anello per le matrici quadrate di un fissato ordine. Rango di una matrice. Operazioni elementari sulle righe e riduzione a scala, matrici ridotte. Determinante di una matrice quadrata con la I relazione di Laplace, proprietà dei determinanti, II relazione di Laplace, caratterizzazione della invertibilità di una matrice quadrata mediante la nozione di determinante, rango di una matrice e teorema degli orlati o di Kronecker. (Dimostrazioni: Una matrice è invertibile, allora det(A) è diverso da zero).

5) SISTEMI LINEARI Generalità sulle soluzioni di un'equazione lineare (in particolare le soluzioni di un'equazione lineare in due o tre variabili). Generalità sui sistemi lineari e modi possibili di scrivere un sistema utilizzando le matrici. Compatibilità ed insieme delle soluzioni. Sistemi equivalenti. Sistemi omogenei, proprietà dell'insieme delle soluzione di un sistema omogeneo. Teoremi di Rouché-Capelli e di Cramer. Risoluzione di un sistema lineare: il metodo dei determinanti e il metodo di Gauss-Jordan. Sistemi con parametri. (Dimostrazioni: Un sistema è compatibile se e solo se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice A, l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale).

6) DIAGONALIZZAZIONE Endomorfismi, significato della diagonalizzazione. Autovalori, autovettori ed autospazi, polinomio caratteristico. Relazione tra autospazi associati ad autovalori distinti. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica, relazione tra le due molteplicità, autovalori regolari. Teorema che caratterizza gli endomorfismi diagonalizzabili. (Dimostrazione: L'insieme degli autovettori associati ad un autovalore unito il vettore nullo è un sottospazio vettoriale, ad ogni autovettore è associato un unico autovalore, un sistema costituito da due autovettori corrispondenti ad autovalori distinti è indipendente, un endomorfismo che ammette n autovalori distinti è diagonalizzabile).

7) PRODOTTI SCALARI Definizione di prodotto scalare. Spazio vettoriale euclideo canonico. Spazio vettoriale euclideo, proprietà fondamentali in uno spazio euclideo. Ortogonalità in uno spazio euclideo, complemento ortogonale. Norma e modulo di un vettore, versori. Base ortogonale e base ortonormale, ortogonalità e indipendenza lineare. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. (Dimostrazioni: Proprietà elementari in uno spazio vettoriale euclideo, sottospazio vettoriale ortogonale, un sistema di t vettori non nulli a due a due ortogonali è un sistema linearmente indipendente).

8) GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO EUCLIDEO Numeri direttori di un vettore, rappresentazione di una retta e di un piano nello spazio, forma parametrica e cartesiana di piani e rette. Calcolo dei numeri direttori di una retta e di una retta normale al piano, giacitura di un piano. Prodotto scalare ed ortogonalit. Posizione reciproca tra sottospazi: incidenza, parallelismo, ortogonalità. Rette complanari e rette sghembe. Rette perpendicolari. La comune retta normale e incidente due rette sghembe. Equazione del fascio proprio di piani nello spazio, stelle di piani. Distanze tra punti, tra rette, tra piani, punto-retta, punto-piano, retta-piano.

Testi consigliati:

L. A. Lomonaco, Un'introduzione all'algebra lineare, ed. Aracne,

D. Olanda, Note di algebra lineare e geometria analitica, E.DI.SU

P. Biondi - P. M. Lo Re, Appunti di geometria, E.DI.SU,

S. Lipschutz, M. Lipson, Algebra lineare, McGraw-Hill