Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 25 Gennaio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome__________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = L[(-1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,0),(-1,1,-1)]$$

$$W = \{(x,y,z) \mid 2x+y+z=0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di U.
(ii) Determinare la dimensione e una base di W.
(iii) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.
(iv) Dire, giustificando la risposta, se $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di U e W.
(v) Determinare i vettori $u \in W \cap U$ con $||u|| = 22$.

(i) Osserviamo che il sistema $S = [(-1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,0),(-1,1,-1)]$ è sicuramente dipendente (ci sono 4 vettori di $\mathbb{R}^3$). Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'ultima matrice è a gradini e presenta soltanto 2 pivot, i vettori che in S si selezionano in corrispondenza dei pivot costituiscono una base di U. Nel nostro caso $U = L[(-1,0,1),(0,-1,2)]$, possiamo scrivere che $U = \{\alpha(-1,0,1)+\beta(0,-1,2) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(-\alpha,0,\alpha)+(0,-\beta,2\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{(-\alpha,-\beta,\alpha+2\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \mid -\alpha = x, -\beta = y, \alpha+2\beta = z\} = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=0\}$.
Una rappresentazione cartesiana risulta essere $U = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=0\}$.

(ii) Ad esempio possiamo scrivere che $W = \{(x,y,z) \mid 2x+y+z=0\} = \{(x,y,z) \mid y=-2x-z\}$. Se poniamo $x=h$ e $z=k$, si ha: $W = \{(h,-2h-k,k) \mid h,k \in \mathbb{R}\} =$
$= \{h(1,-2,0)+k(0,-1,1) \mid h,k \in \mathbb{R}\} = L[(1,-2,0),(0,-1,1)]$. In maniera compatta $W = L[(1,-2,0),(0,-1,1)]$, quindi $\dim W = 2$ e una sua base è $T = [(1,-2,0),(0,-1,1)]$.

(iii) In questa situazione si può dire che $U \cap W = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=0 \text{ e } 2x+y+z=0\}$. Bisogna risolvere il sistema: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$, un semplice sistema omogeneo di 2 equazioni in 3 variabili. Scriviamo l'unica matrice del sistema $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si nota facilmente che la matrice ha rango 2 in quanto le righe non sono proporzionali. Le soluzioni sono $\infty^{3-2} = \infty^1$. Il generatore ha come componenti il determinate della matrice di ordine 2 che si ottengono da M cancellando di seguito la 1^a colonna, la 2^a colonna e la 3^a colonna, ricordiamo di considerare tali determinanti a segno alterno.

$S_0 = L\left[\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)\right] = L\left[(1,1,-3)\right]$ (ricordiamo che nel risolvere tale sistema abbiamo applicato un criterio generale sui sistemi lineari omogenei con $n-1$ equazioni in n variabili con il rango della matrice dei coefficienti n). Possiamo concludere che $U \cap W = L\left[(1,1,-3)\right]$, quindi $\dim U \cap W = 1$ e $N = [(1,1,-3)]$ è una sua base.

(iv) Poichè $\dim U \cap W = 1$ di certo non può accadere che $\mathbb{R}^3$ sia somma diretta di U e W, dalle informazioni che abbiamo possiamo solo dire che $\mathbb{R}^3 = U+W$ (osserviamo che $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2+2-1 = 3$).

(v) I vettori di $u \in U \cap W = L\left[(1,1,-3)\right] = \{(\alpha,\alpha,-3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Quindi $||u|| = (\alpha,\alpha,-3\alpha) \cdot (\alpha,\alpha,-3\alpha) = \alpha^2+\alpha^2+9\alpha^2 = 22$, in sintesi $11\alpha^2 = 22 \Longrightarrow \alpha^2 = 2 \Longrightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}$. Possiamo concludere che gli unici vettori di $U \cap W$ che soddisfano la condizione sono: $u_1 = \left(\sqrt{2},\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$ e $u_2 = \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$.

- **2**. Assegnata la seguente matrice H_k :

$$H_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il suo rango al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare l'elemento di posto $(3,4)$ della matrice H_0^{-1}.

(i) Trattasi di una matrice quadrata, calcoliamo il determinante applicando la regola di Laplace secondo l'ultima riga: $|H_k| = -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & k & k \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(-k+1-k^2+k\right) = k^2-1.$

In sintesi $|H_k| = k^2-1$, ovvio che se $k \neq \pm 1 \Longrightarrow \rho(H_k) = 4$. Discutiamo i casi particolari:

Se $k=-1$, $H_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, in questo caso $\rho(H_{-1}) = 3$.

(Il rango della matrice precedente si poteva determinare anche utilizzando il metodo degli orlati).

Se $k = 1$, $H_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, anche in questo caso $\rho(H_1) = 3$.

(Il rango della matrice precedente si poteva determinare anche utilizzando il metodo degli orlati).

(ii) Per calcolare l'elemento di posto $(3,4)$ della matrice H_0^{-1} non è necessario calcolare l'inversa di H_0. E' sufficiente riflettere su come si calcola l'inversa di una matrice, bisogna calcolare soltanto il cofattore $H_{0_{43}} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ e dividere tale quantità per il determinante della matrice H_0 che è uguale a -1 (ricordare che l'inversa si ottiene facendo la trasposta della matrice dei cofattori e dividendo ciascun termine per il determinante). In conclusione possiamo dire che l'elemento di posto $(3,4)$ della matrice H_0^{-1} è 1.

- **3**. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_h &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z,t) &= (x-hy-z-t, x+z-t, hy+z) \end{aligned}$$

(i) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $K\operatorname{erf}_h$.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_h non è un epimorfismo.

(i) Per determinare una base e la dimensione di di $K\operatorname{erf}_h$ bisogna discutere e risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} x - hy - z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ hy + z = 0 \end{cases}$$

Utilizziamo il metodo di Gauss-Jordan, $M = \begin{pmatrix} 1 & -h & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & h & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -h & -1 & -1 \\ 0 & h & 2 & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ponendo $h \neq 0$ per garantirsi che il pivot sia diverso da zero$\sim \begin{pmatrix} 1 & -h & -1 & -1 \\ 0 & h & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -h & -1 & -1 \\ 0 & h & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Con la condizione $h \neq 0$, il sistema diventa:$\begin{cases} x - hy - z = t \\ hy + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e ponendo $t = l$ variabile libera$\Longrightarrow \begin{cases} x - hy - z = l \\ hy + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = l \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = l \end{cases}$, quindi l'insieme delle soluzione è descritto in questo modo:

$K\,\mathrm{erf}_h = \{(l, 0, 0, l) \mid \text{con } l \in \mathbb{R}\}$ e quindi $K\,\mathrm{erf}_h = L[(1, 0, 0, 1)]$ e $\dim K\,\mathrm{erf}_h = 1$.

Discutiamo il caso particolare $h = 0$, ponendo proprio $h = 0$ nella matrice dove abbiamo posto la condizione sul pivot, si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tale caso il sistema diventa: $\begin{cases} x - z = t \\ z = 0 \end{cases}$ e ponendo $y = l$ e $t = m$ variabili libere$\Longrightarrow$

$\begin{cases} x - z = m \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = l \\ z = 0 \\ t = m \end{cases}$, quindi l'insieme delle soluzione è descritto in questo modo:

$K\,\mathrm{erf}_0 = \{(m, l, 0, m) \mid \text{con } l, m \in \mathbb{R}\}$ e quindi $K\,\mathrm{erf}_0 = L[(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)]$ e $\dim K\,\mathrm{erf}_0 = 2$.

(ii) Se $h \neq 0$ sappiamo che $\dim K\,\mathrm{erf}_h = 1$, tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che $\dim \mathrm{Im}\, f_h = 3$ e quindi f_h è un epimorfismo. Se $h = 0$ sappiamo che $\dim K\,\mathrm{erf}_0 = 2$, tenendo conto dell'equazione dimensionale, otteniamo che $\dim \mathrm{Im}\, f_0 = 2$ e quindi f_h non è un epimorfismo. In conclusione la risposta al quesito (ii) è $h = 0$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) \quad &= \quad (3x - 2y + 2z, 2x - 2y + z, -z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0, 0, -1), (1, 0, 0), (0, -1, 0))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(i)
Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:
$f(0, 0, -1) = (-2, -1, 1)$;
$f(1, 0, 0) = (3, 2, 0)$;
$f(0, -1, 0) = (2, 2, 0)$;
Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base $B = ((0, 0, -1), (1, 0, 0), (0, -1, 0))$:

$a(0,0,-1)+b(1,0,0)+c(0,-1,0)=(b,-c,-a) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ -c=-1 \\ -a=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} b=3 \\ -c=2 \\ -a=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} b=2 \\ -c=2 \\ -a=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}$

La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine:

$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii)

Per rispondere al punto (ii), determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-2-\lambda)+4\right] = (-1-\lambda)\left[\lambda^2-\lambda-2\right]$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f + I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, si ha:

$A_f + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{x - 2y - z = 0$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\{x = 2y + z$

$V_{-1} = \{(2y+z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (2,1,0)$ e $u_2 = (1,0,1)$, quindi $V_{-1} = [(2,1,0),(1,0,1)]$

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 2$, si ha:

$A_f - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases}$

$V_2 = \{(0, -2z, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (0,-2,1)$, quindi $V_2 = [(0,-2,1)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remark 1 *OSSERVAZIONE IMPORTANTE*

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Per essere più espliciti consideriamo l'autospazio V_{-1}, una sua base è costituita dai vettori $u_1 = (2,1,0)$ e $u_2 = (1,0,1)$, tali vettori non sono autovettori di autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, infatti si ha:

$$\begin{aligned} f(2,1,0) &= (4,2,0) \neq -1(2,1,0) \\ &\quad \text{come pure} \\ f(1,0,1) &= (5,3,-1) \neq -1(1,0,1) \end{aligned}$$

Osserviamo che i vettori:

$$\begin{aligned} \underline{(1,0,-2)} &= 2(0,0,-1) + 1(1,0,0) + 0(0,-1,0) \\ \underline{(0,-1,-1)} &= 1(0,0,-1) + 0(1,0,0) + 1(0,-1,0) \\ \underline{(-2,-1,0)} &= 0(0,0,-1) - 2(1,0,0) + 1(0,-1,0) \end{aligned}$$

sono tali che i primi due sono autovettori di autovalore -1 e l'ultimo un autovettore di autovalore 2.
Una base di autovettori è la seguente: $T = [(1,0,-2),(0,-1,-1),(-2,-1,0)]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,0) \qquad r : \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \qquad \pi : 2x-y+z=-1$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e parallela a r.
(ii) Determinare il piano α che contiene le rette r e s.
(iii) Determinare la distanza tra le rette r e s.
(iv) Determinare il piano β contenente la retta s e perpendicolare a π.

(i) La direzione di r si ottiene calcolando il determinate dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$.

La retta s deve avere la direzione individuata dal vettore $v = (1,0,1)$ e passante per $P \equiv (1,-1,0)$, quindi $s : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$, in forma cartesiana $s : \begin{cases} x-z=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

(ii) Ci sono diverse strategie per risolvere questo quesito, utilizziamo il fascio di piani per r e imponiamo che il generico piano del fascio passa per P.

$\lambda(x+y-z-1) + \mu(x+2y-z) = 0$, imponendo il passagio per P, $-\lambda - \mu = 0 \Longrightarrow \lambda = -\mu$.

Se poniamo $\mu = -1 \Longrightarrow \lambda = 1$ e quindi $x+y-z-1-x-2y+z=0 \Longrightarrow -y-1=0 \Longrightarrow y+1=0$. In conclusione il piano che contiene le rette r e s è $\alpha : y+1=0$.

(iii) Anche questo punto può essere risolto in più di un modo. Consideriamo un punto arbitrario su r, si trova facilmente, ad esempio $Q \equiv (2,-1,0)$ (bisogna trovare una terna che soddisfa le due equazioni che rappresentano r). Consideriamo il generico punto di s, facile da descrivere considerata la rappresentazione parametrica di s, otteniamo $P_s \equiv (1+t,-1,t)$.

Calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{P_sQ} = (t-1, 0, t)$ e imponiamo che il vettore $\overrightarrow{P_sQ}$ sia ortogonale al vettore direzione di r o s: $v = (1, 0, 1)$.

Tale condizione si verifica se vale la seguente condizione:
$(t-1, 0, t) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Longleftrightarrow t - 1 + t = 0 \Longleftrightarrow 2t = 1 \Longleftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$
Il punto $P_s \equiv (1+t, -1, t)$ quando $t = \dfrac{1}{2}$ diventa: $P_s \equiv \left(\dfrac{3}{2}, -1, \dfrac{1}{2}\right)$. A questo punto per calcolare la distanza tra le due rette è sufficiente calcolare la lunghezza del segmento $\overrightarrow{P_sQ}$ e quindi $d(r,s) = \left|\overrightarrow{P_sQ}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2} - 2\right)^2 + (-1+1)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Un altro modo è calcolare il piano γ per P e perpendicolare a s, determinare il punto Q di intersezione tra γ e r e infine calcolare $d(P, Q)$.

(iv) Il piano β deve contenere la retta s,dunque deve passare per P e "contenere" la direzione di s e la direzione perpendicolare a π.

Direzione di $s : v = (1, 0, 1)$. Direzione ortogonale a $\pi : n = (2, -1, 1)$. Il piano che soddisfa le condizioni è il seguente:
$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, quindi $\beta : x + y - z = 0$.