# Esame di Geometria e Algebra

Prova scritta 11 Gennaio 2012

**Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)** Cognome e Nome____________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4,\cdot\right)$ siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U=\{(h,k,h+2k,h+k)\mid h,k\in\mathbb{R}\}$$

$$W_\lambda=\{(x,y,z,t)\mid \lambda x-z=0,\ x-y=0\}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $U$.
(ii) Determinare la dimensione e una base di $W_\lambda$ al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$.
(iii) Dire per quali valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $W_\lambda$ e $U$.
(iv) Determinare l'angolo $\theta\in[0,\pi]$ individuato dai vettori della base di $U$.

(i) Una base di $U$ è costituita dal sistema $S=[(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$, quindi $\dim U=2$.

(ii) Per determinare una base e la dimensione di $W_\lambda$ risolviamo il sistema: $\begin{cases} x-y=0\\ \lambda x-z=0\end{cases}$, si ottiene $\begin{cases} x=y\\ z=\lambda y\end{cases}$ quindi possiamo dire, ponendo $y=h$ e $t=k$, che $W_\lambda=\{(h,h,\lambda h,k)\mid \text{ con } h,k\in\mathbb{R}\}$. Un sistema di generatori di $W_\lambda$ è il seguente $S_\lambda=[(1,1,\lambda,0),(0,0,0,1)]$, osserviamo che un tale sistema è linearmente indipendente $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ in quanto la matrice $M_\lambda=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ ha sempre rango 2, questo perchè la sottomatrice $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ di ordine 2 estraibile da $M_\lambda$ ha determinante non nullo. Possiamo concludere che $\dim W_\lambda=2$ e $S_\lambda=[(1,1,\lambda,0),(0,0,0,1)]$ è una base di $W_\lambda$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

(iii) Consideriamo la matrice $M_\lambda=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&1\\1&1&\lambda&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, sviluppando con Laplace secondo la quarta riga si ottiene $|M_\lambda|=\lambda-3$, osserviamo che se $\lambda-3\neq 0$ ovvero $\lambda\neq 3$ il sottospazio vettoriale somma $U+W_\lambda$ ha dimensione 4, i singoli sottospazi vettoriali hanno dimensione 2 e per la formula di Grassmann $\dim(U\cap W_\lambda)=0$. Possiamo concludere che se $\lambda\neq 3$ allora $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $U$ e $W_\lambda$.

(iv) Ovvio che tale risultato dipende dalla base scelta per $U$, quella più evidente è $S=[(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$ e $\cos\theta=\dfrac{(1,0,1,1)\cdot(0,1,2,1)}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, in conclusione se $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si ottiene $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

- **2**. Assegnata, al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$, la seguente matrice $H_k$ :

$$H_k=\begin{pmatrix}k&1&0\\1&1&0\\0&0&k\end{pmatrix}$$

(i) Dire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ il rango di $H_k$ non è massimo.
(ii) Al variare di $k\in\mathbb{R}$ calcolare, se esiste, l'inversa di $H_k$.

(i) Si ottiene con semplici calcoli che $|H_k|=k^2-k$, ovvio che se $k=0\vee k=1$ il rango della matrice $H_k$ non è massimo.

(ii) L'inversa di $H_k$ esiste se $k\neq 0\wedge k\neq 1$, in tal caso $H_k^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k-1}&-\frac{1}{k-1}&0\\-\frac{1}{k-1}&\frac{k}{k-1}&0\\0&0&\frac{1}{k}\end{pmatrix}$

- **3**. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili $x, y, z, t$:

$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ x + ky - z = 0 \\ x - y + z + t = 1 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare la soluzione del sistema lineare per $k = 0$.

(i) Utilizziamo il metodo di Gauss-Jordan, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & k & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & k+1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \underline{k+1} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{pmatrix}$

Ovvio che se $k + 1 \neq 0$ ovvero $k \neq -1$, il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa, si ha $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. I pivot sono quelli sottosegnati e il sistema diventa: $\begin{cases} x - y - t = -1 - z \\ (k+1)y + t = 1 + 2z \\ t = 1 \end{cases}$, risolvendo a ritroso e ponendo la variabile libera $z = h$ si ottiene:
$\begin{cases} x = \dfrac{h - kh}{k+1} \\ y = \dfrac{2h}{k+1} \\ z = h \\ t = 1 \end{cases}$

Discutiamo il caso particolare $k = -1$, in tale situazione la matrice dove abbiamo posto la condizione sul pivot diventa: $\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{pmatrix}$, essa è ridotta a scala e i pivot sono quelli sottosegnati. Anche in questo caso le souzioni sono $\infty^{4-3} = \infty^1$, il sistema diventa: $\begin{cases} x + z - t = -1 + y \\ -2z + t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$, risolvendo a ritroso e ponendo la variabile libera $y = h$ si ottiene: $\begin{cases} x = h \\ y = h \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $R^3$:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad R^3 \longrightarrow R^3 \\ f_h(x, y, z) \quad &= \quad (4x + y + 2z, -2x + y - 2z, hz) \end{aligned}$$

(i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinare gli autovalori di $f_h$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $f_2$, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice $P$ che diagonalizza $A_{f_2}$.
(iii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f_h$ non è diagonalizzabile.

(i) La matrice che rappresenta $f_h$ nella base canonica di $R^3$ è la seguente: $A_{f_h} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, sarà
$A_{f_h} - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & h - \lambda \end{pmatrix}$ e

quindi $p_h(\lambda) = |A_{f_h} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)[(4-\lambda)(1-\lambda)+2] =$ $(h-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$.

Determiniamo gli autovalori: $(h-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = h, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

(ii) Studiamo la diagonalizzabilità dell'endomorfismo quando $h = 2$. In questo caso $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Utilizzando la matrice $A_{f_h} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, si ha:

$$A_{f_2} - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ 2x + y + 2z = 0 \right. \Longrightarrow \left\{ y = -2x - 2z \right.$$

$V_2 = \{(x, -2x-2z, z)$ con $x, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai due vettori: $u_1 = (1, -2, 0)$ e $u_2 = (0, -2, 1)$, quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ è $V_2 = [(1,-2,0), (0,-2,1)]$.

Utilizzando la matrice $A_{f_h} - \lambda I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 2$, si ha:

$$A_{f_2} - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$V_3 = \{(-y, y, 0)$ con $y \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, -1, 0)$ , quindi l'autospazio corrispondente a $\lambda_3 = 3$ è $V_2 = [(1, -1, 0)]$.

La matrice diagonalizzante la $A_{f_2}$ è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $P$ si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_{f_2} P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1} A_{f_2} P =: \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii) Evidente che se $h \neq 2 \wedge h \neq 3$ l'endomorfismo $f_h$ è diagonalizzabile in quanto i tre autovalori sono semplici. Per $h = 2$ abbiamo appena visto che l'endomorfismo $f_2$ è diagonalizzabile, resta da controllare cosa accade per $h = 3$. In tale circostanza $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Utilizzando la matrice $A_{f_3} - 3I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_3 = 3$, si ha:

$A_{f_3} - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ Possiamo subito concludere che $\lambda_1 = \lambda_3 = 3$ è un autovalore non regolare, la sua molteplicita algebrica $m_a = 2$ mentre la sua molteplicità geometrica $m_g = 1$.

Possiamo finalmente concludere che l'endomorfismo $f_h$ non è diagonalizzabile solo per $\lambda = 3$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, 1, 1) \qquad r : \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Verificare che le rette $r$ e $s$ sono incidenti e determinare le coordinate del punto comune $Q$.

(ii) Determinare il piano $\alpha$ che contiene le rette $r$ e $s$.

(iii) Determinare una forma parametrica e cartesiana della retta $n$ passante per $P$ e ortogonale al piano $\alpha$.

(iv) Determinare il piano $\beta$ passante per $P$ parallelo alla retta $r$ e perpendicolare al piano $\alpha$.

(i) Sostituendo le componenti di $s$ nell'equazione che definiscono $r$ si ha: $\left\{\begin{array}{c} 2(2+t)-2t+2+t=5 \\ 2+t+2+t=2 \end{array}\right. \Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{c} 4+2t-2t+2+t=5 \\ 2+t+2+t=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t=-1 \\ 2t=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t=-1 \\ t=-1 \end{array}\right.$, il punto comune alle due rette si ottiene ponendo in $s$ il valore $t=-1: Q \equiv (1,2,1)$.

(ii) La direzione di $r$ si ottiene calcolando il determinate dei minori a segno alterno della matrice $M=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\lambda=1, \mu=-1, \nu=-1$.

La direzione di $s$ è $\lambda'=1, \mu'=-2, \nu'=1$. Tenendo conto del passaggio per $Q \equiv (1,2,1)$, il piano $\alpha$ che contiene le rette $r$ e $s$ si ottiene uguagliando a zero il seguente determinante: $\left|\begin{array}{ccc} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right|=0$, quindi $\alpha: 3x+2y+z-8=0$.

(iii) La retta $n$ deve avere la direzione individuata dal vettore $v=(3,2,1)$ e quindi $n: \left\{\begin{array}{c} x=3t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{array}\right.$. Una forma cartesiana è la seguente: $n: \left\{\begin{array}{c} x-3z=-3 \\ y-2z=-1 \end{array}\right.$.

(iv) Tenendo conto del passaggio per $P \equiv (0,1,1)$, il piano $\beta$ deve contenere la direzione di $r$ e la direzione ortogonale al piano $\alpha$ e in definitiva:

$\left|\begin{array}{ccc} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right|=0$, quindi $\beta: x-4y+5z-1=0$.