Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 8 Febbraio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome___________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ sia assegnato il seguente sottospazio vettoriale:

$$U = \{(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+2\beta+\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base Γ_1 e la dimensione di U.

(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$ e una sua base Γ_2.

(iii) Giustificando la risposta, dire se $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo ortonormalizzare $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

(iv) Determinare i vettori $u \in U^\perp$ con $|u| = 3$.

(i) Possiamo scrivere $U = \{\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,2) + \gamma(0,1,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = L\left[(1,0,1), (1,1,2), (0,1,1)\right]$.

Il sistema $[(1,0,1), (1,1,2), (0,1,1)]$ è linearmente dipendente in quanto la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, come è facile controllare ha determinante nullo, quindi il $\rho(A) = 2$. Concludiamo che $\dim U = 2$ e una sua base è $\Gamma_1 = [(1,0,1), (1,1,2)]$.

(ii) Per determinare una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$ scriviamo:

$U^\perp = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0,\ (x,y,z)\cdot(1,1,2) = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \mid x+z = 0,\ x+y+2z = 0\}$. In definitiva $U^\perp = \{(x,y,z) \mid x+z = 0,\ x+y+2z = 0\}$ è una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$. Per determinare una base dobbiamo risolvere il sistema omogeneo composto dalle equazioni lineari che definiscono $U^\perp$; ci si rende conto facilmente che la matrice del sistema lineare omogeneo è proprio $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, le soluzioni sono $\infty^{3-2} = \infty^1$ e come al solito il generatore ha come componenti il determinate della matrice di ordine 2 che si ottengono da M cancellando di seguito la 1^a colonna, la 2^a colonna e la terza 3^a colonna, ricordiamo di considerare tali determinanti a segno alterno.

$S_0 = L\left[\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)\right] = L\left[(-1,-1,1)\right] = L\left[(1,1,-1)\right]$ (ricordiamo che nel risolvere tale sistema abbiamo applicato un criterio generale sui sistemi lineari omogenei con $n-1$ equazioni in n variabili con il rango della matrice dei coefficienti n). Possiamo concludere $\Gamma_2 = [(1,1,-1)]$.

(iii) Sappiamo dalla teoria che $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ e in questo caso facendo l'unione di una base di U con una base di $U^\perp$ si ottiene una base di $\mathbb{R}^3$, possiamo concludere che $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{(1,0,1), (1,1,2), (1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (si può fare anche una verifica diretta controllando che il determinante della matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ è diverso da 0).

Osserviamo che il primo $w_1 = (1,0,1)$ e il terzo vettore $w_2 = (1,1,-1)$ di $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sono già tra di loro ortogonali, considerando il secondo vettore $v_3 = (1,1,2)$ è possibile costruire con il procedimento di Gram-Schmidt il seguente vettore:

$$\overline{w}_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = (1,1,2) - \frac{(1,1,2)\cdot(1,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)}(1,0,1) - \frac{(1,1,2)\cdot(1,1,-1)}{(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)}(1,1,-1) =$$

$$= (1,1,2) - \frac{3}{2}(1,0,1) - 0\,(1,1,-1) = (1,1,2) + \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$; possiamo considerare il vettore proporzionale $w_3 = (1,-2,-1)$ il sistema $\overline{\Gamma} = [w_1 = (1,0,1), w_2 = (1,1,-1), w_3 = (1,-2,-1)]$ è ortogonale, dividendo ciascun vettore per il proprio modulo si ottiene il sistema ortonormale $\overline{\Gamma} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$.

(iv) Il generico vettore $u \in U^{\perp} = L\left[(1,1,-1)\right] = \{(\alpha,\alpha,-\alpha) \ |\alpha \in \mathbb{R}\}$. Quindi $|u| = \sqrt{(\alpha,\alpha,-\alpha)\cdot(\alpha,\alpha,-\alpha)} = \sqrt{3\alpha^2}$, in sintesi $\sqrt{3\alpha^2} = 3 \Longrightarrow \sqrt{3}\,|\alpha| = 3 \Longrightarrow |\alpha| = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$
$= \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$; in definitiva $|\alpha| = \sqrt{3} \Longrightarrow \alpha = \pm\sqrt{3}$ Possiamo concludere che gli unici vettori di $U^{\perp}$ che soddisfano la condizione sono: $u_1 = \left(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$ e $u_2 = \left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad\qquad B_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ h & h & 1 & -1 \\ -1 & h-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il rango di A.
(ii) Determinare il rango di B_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(iii) Calcolare il determinante della matrice prodotto AB_h e dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice AB_h è invertibile.

(i) Per calcolare il rango di A valutiamo il determinante della matrice A, facilmente calcolabile con Laplace applicato alla 1^a riga: $|A| = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (ancora Laplace con la 2^a riga)$= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$; possiamo concludere che $\rho(A) = 4$.
(ii) Per calcolare il rango di B_h valutiamo il determinante della matrice B_h, facilmente calcolabile con Laplace applicato alla 3^a colonna: $|B_h| = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ (ancora Laplace con la 2^a colonna)$= -(h-1)(-1) = h-1$;possiamo concludere che $\rho(B_h) = 4 \Longleftrightarrow h-1 \neq 0 \Longleftrightarrow h \neq 1$. Se $h = 1$, la matrice diventa: $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e il suo rango si calcola velocemente riducendo a scala la matrice scritta in precedenza: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} \underline{-1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, possiamo concludere che $\rho(B_1) = 3$ (abbiamo evidenziato i 3 pivot).

Possiamo sintetizzare i risulati ottenuti: $\begin{matrix} \rho(B_h) = 4 & \text{se } h \neq 1 \\ \rho(B_h) = 3 & \text{se } h = 1 \end{matrix}$

(iii) Per risolvere questo punto facciamo affidamento alla regola di Binet per calcolare il determinante della matrice AB_h, si ha: $|AB_h| = |A|\cdot|B_h| = -2(h-1) = 2(1-h)$, da tale risultato concludiamo che AB_h è invertibile $\Longleftrightarrow 2(1-h) \neq 0 \Longleftrightarrow h \neq 1$.

- **3**. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) \quad &= \quad (x+y, hy, hz) \end{aligned}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la condizione $Kerg = \operatorname{Im} f_0$.

(i) Per calcolare una base di $\operatorname{Im} f_h$ possiamo determinare le immagini tramite f_h dei vettori della base canonica $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$f_h(1,0,0) = (1,0,0)$, $f_h(0,1,0) = (1,h,0)$, $f_h(0,0,1) = (0,0,h)$. Costruiamo la seguente matrice:

$A_{f_h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, le colonne di A_{f_h} costituiscono un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f_h$.

Se $|A_{f_h}| = h^2 \neq 0 \iff h \neq 0$ è evidente che $\operatorname{Im} f_h = L[(1,0,0),(1,h,0),(0,0,h)]$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f_h = 3$ e una sua base è $S = [(1,0,0),(1,h,0),(0,0,h)]$.

Se $h = 0$ la matrice $A_{f_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, risulta evidente che $\operatorname{Im} f_0 = L[(1,0,0)]$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f_0 = 1$ e una sua base è $S = [(1,0,0)]$.

(ii) Osserviamo intanto che di applicazioni che soddisfano le condizioni assegnate ne esistono infinite, ogni omomorfismo è univocamente determinato quando si assegnano le immagini sui vettori di una base. Dobbiamo costruire un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $Kerg = \operatorname{Im} f_0 = L[(1,0,0)]$. Per fare questo dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S = [(1,0,0)]$, noi prenderemo l'estensione più evidente: $C = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$, visto che $\dim Kerg = 1$ faremo in modo che l'immagine di questo omomorfismo g da costruire abbia dimensione 2 per rispettare la relazione $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim K\operatorname{erf} + \dim \operatorname{Im} f$.

Fissiamo a piacere, tenendo però conto dell'equazione dimensionale [se dim$Kerg = 1 \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} g = 2$], le immagini di g sui vettori di una base e poi la estendiamo per linearità:

$g(1,0,0) = (0,0,0)$
$g(0,1,0) = (0,1,0)$
$g(0,0,1) = (0,0,1)$

Sappiamo che $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ e quindi $g(x,y,z) = xg(1,0,0) + yg(0,1,0) + zg(0,0,1) = x(0,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (0,y,z)$

In sintesi l'omomorfismo costruito è il seguente: $g(x,y,z) = (0,y,z)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (x+y, 2x+2y, 2x-y+3z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(i)

Bisogna determinare ordinatamente le immagini dei vettori della base:

$f(0,0,1) = (0,0,3)$;
$f(0,1,0) = (1,2,-1)$;
$f(1,0,0) = (1,2,2)$;

Ci chiediamo quali sono le componenti di queste immagini nella base $B = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$:

$a(0,0,1) + b(0,1,0) + c(1,0,0) = (c,b,a) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne le componenti dei vettori immagine:

$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii)

Per rispondere al punto (ii), determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2\right] = (3-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda\right]$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 3I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, si ha:

$A_f - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{-y + 2z = 0$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\{y = 2z$

$V_3 = \{(x, 2z, z)$ con $x, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,2,1)$, quindi $V_3 = [(1,0,0),(0,2,1)]$

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 0$.

Utilizzando la matrice $A_f - 0I = A_f$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_3 = 0$, si ha:

$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Questo sistema è equivalente al seguente:$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$

$V_0 = \{(-z, -z, z)$ con $z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1, 1, -1)$, quindi $V_0 = [(1,1,-1)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1} A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}AP =: \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remark 1 <u>*OSSERVAZIONE IMPORTANTE*</u>

Gli elementi degli insiemi V_λ che abbiamo determinato non sono gli autovettori dell'endomorfismo, ma le componenti degli autovettori nella base che abbiamo inizialmente scelto. Per essere più espliciti consideriamo l'autospazio V_3, una sua base è costituita dai vettori $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,2,1)$, tali vettori non sono autovettori di autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, infatti si ha:

$$
\begin{array}{rcl}
f(1,0,0) & = & (1,2,2) \neq 3(1,0,0) \\
 & & \text{come pure} \\
f(0,2,1) & = & (2,4,1) \neq 3(2,4,1)
\end{array}
$$

Osserviamo che i vettori:

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{(0,0,1)} & = & 1(0,0,1)+0(0,1,0)+0(1,0,0) \\
\underline{(1,2,0)} & = & 0(0,0,1)+2(0,1,0)+1(1,0,0) \\
\underline{(-1,1,1)} & = & 1(0,0,1)+1(0,1,0)-1(1,0,0)
\end{array}
$$

sono tali che i primi due sono autovettori di autovalore 3 e l'ultimo un autovettore di autovalore 0. Una base di autovettori è la seguente: $T = [(0,0,1),(1,2,0),(-1,1,1)]$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,1) \qquad Q \equiv (2,1,0) \qquad s : \begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta r passante per P e Q.
(ii) Determinare il piano α contenente s e parallelo r.
(iii) Calcolare la distanza tra le rette r e s.
(iv) Determinare il piano β contenente la retta r e perpendicolare ad α.
(v) Determinare il piano γ contenente la retta s e passante per P.
(vi) Determinare il piano δ perpendicolare alla retta s e passante per Q.

(i) La direzione di r si ottiene calcolando le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ} = (1,2,-1)$, $r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 1-t \end{cases}$,
una forma cartesiana di $r : \begin{cases} x+z=2 \\ y+2z=1 \end{cases}$.

.

(ii) Intanto calcoliamo la direzione di s calcolando i determinanti dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = 0$. Il piano α che dobbiamo determinare deve contenere la retta s,cioè la direzione di s e in particolare un suo punto per esempio $O\equiv (0,0,0)$, infine deve contenere la direzione di r. Il piano che soddisfa le condizioni è il seguente:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ quindi } \alpha : x+y+3z=0.$$

(iii) Quest'ultimo punto della distanza tra le rette r e s può essere risolto facilmente calcolando la distanza di un qualsiasi punto di r dal piano α. Applichiamo la formula della distanza di un punto da un piano: $d(P,\alpha) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, nel nostro caso $P \equiv (1,-1,1)$ e $\alpha : x+y+3z=0$:

$$
\begin{array}{rcl}
d(P,\alpha) & = & \dfrac{|3|}{\sqrt{1+1+9}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}} = \dfrac{3}{11}\sqrt{11} \\
d(r,s) & = & \dfrac{3}{11}\sqrt{11}
\end{array}
$$

(iv) Il piano β che dobbiamo determinare deve contenere la retta r,cioè la direzione di r e in particolare un suo punto per esempio $P\equiv (1,-1,1)$, infine deve contenere la direzione ortogonale al piano α e cioè $\overrightarrow{n} = (1,1,3)$.

Il piano che soddisfa le condizioni è il seguente:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ quindi } \beta : 7x - 4y - z - 10 = 0.$$

(v) Per determinare γ consideriamo il fascio di piani che contengono la retta s: $\lambda(x+y+z)+\mu(x+y)=0$ e imponiamo il passaggio per P di questo generico piano:

$$\lambda + 0\mu = 0$$

Otteniamo i valori $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, il piano γ che soddisfa le condizioni poste è: $\gamma : x + y = 0$.

(vi) Il generico piano ortogonale alla retta s può essere rappresentato dall'equazione $\delta : x - y + 0z + d = 0$, ricordando che $\lambda = 1$, $\mu = -1$ e $\nu = 0$ sono una terna di parametri direttori della retta s. A questo punto imponiamo il passaggio per il punto $Q \equiv (2, 1, 0)$ e si ottiene $2 - 1 + d = 0 \Longrightarrow d = -1$. In definitiva otteniamo $\delta : x - y - 1 = 0$.