Esame di Geometria e Algebra

Matr.____________________

Prova scritta 25 Gennaio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = L[(-1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,0),(-1,1,-1)]$$

$$W = \{(x,y,z) \mid 2x+y+z=0\}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana di U.
(ii) Determinare la dimensione e una base di W.
(iii) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.
(iv) Dire, giustificando la risposta, se $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di U e W.
(v) Determinare i vettori $u \in W \cap U$ con $||u|| = 22$.

- **2**. Assegnata la seguente matrice H_k :

$$H_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il suo rango al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare l'elemento di posto $(3,4)$ della matrice H_0^{-1}.

- **3**. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_h &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z,t) &= (x-hy-z-t, x+z-t, hy+z) \end{aligned}$$

(i) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $K\,\mathrm{erf}_h$.
(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_h non è un epimorfismo.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) &= (3x-2y+2z, 2x-2y+z, -z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0,0,-1),(1,0,0),(0,-1,0))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,0) \qquad r : \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \qquad \pi : 2x-y+z=-1$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e parallela a r.
(ii) Determinare il piano α che contiene le rette r e s.
(iii) Determinare la distanza tra le rette r e s.
(iv) Determinare il piano β contenente la retta s e perpendicolare a π.