Esame di Geometria e Algebra

Prova scritta 11 Gennaio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^4, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(h, k, h+2k, h+k) \mid h, k \in \mathbb{R}\}$$

$$W_\lambda = \{(x, y, z, t) \mid \lambda x - z = 0,\ x - y = 0\}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di U.
(ii) Determinare la dimensione e una base di W_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di W_λ e U.
(iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori della base di U.

- **2**. Assegnata, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la seguente matrice H_k :

$$H_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(i) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il rango di H_k non è massimo.
(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ calcolare, se esiste, l'inversa di H_k.

- **3**. Assegnato il seguente sistema lineare nelle variabili x, y, z, t:

$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ x + ky - z = 0 \\ x - y + z + t = 1 \end{cases}$$

(i) Discutere e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare la soluzione del sistema lineare per $k = 0$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di R^3:

$$\begin{aligned} f_h &: R^3 \longrightarrow R^3 \\ f_h(x, y, z) &= (4x + y + 2z, -2x + y - 2z, hz) \end{aligned}$$

(i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinare gli autovalori di f_h.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f_2, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_{f_2}.
(iii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_h non è diagonalizzabile.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (0, 1, 1) \qquad r : \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che le rette r e s sono incidenti e determinare le coordinate del punto comune Q.
(ii) Determinare il piano α che contiene le rette r e s.
(iii) Determinare una forma parametrica e cartesiana della retta n passante per P e ortogonale al piano α.
(iv) Determinare il piano β passante per P parallelo alla retta r e perpendicolare al piano α.