Esame di Geometria e Algebra

Matr.________________

Prova scritta 8 Febbraio 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ sia assegnato il seguente sottospazio vettoriale:

$$U = \{(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+2\beta+\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

(i) Determinare una base Γ_1 e la dimensione di U.
(ii) Determinare una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$ e una sua base Γ_2.
(iii) Giustificando la risposta, dire se $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo ortonormalizzare $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
(iv) Determinare i vettori $u \in U^\perp$ con $|u| = 3$.

- **2**. Siano assegnate le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ h & h & 1 & -1 \\ -1 & h-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare il rango di A.
(ii) Determinare il rango di B_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(iii) Calcolare il determinante della matrice prodotto AB_h e dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice AB_h è invertibile.

- **3**. Assegnata la seguente applicazione lineare:

$$\begin{aligned} f_h \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_h(x,y,z) \quad &= \quad (x+y, hy, hz) \end{aligned}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la condizione $Ker g = \operatorname{Im} f_0$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (x+y, 2x+2y, 2x-y+3z) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento $B = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,1) \qquad Q \equiv (2,1,0) \qquad s : \begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta r passante per P e Q.
(ii) Determinare il piano α contenente s e parallelo r.
(iii) Determinare la distanza tra le rette r e s.
(iv) Determinare il piano β contenente la retta r e perpendicolare ad α.
(v) Determinare il piano γ contenente la retta s e passante per P.
(vi) Determinare il piano δ perpendicolare alla retta s e passante per Q.