Esame di Geometria e Algebra

Prova scritta 26 Giugno 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome______________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(-h, k, h+k) \mid \ \ h, k \in \mathbb{R}\}$$

$$W_\lambda = \{(x, y, z) \mid \ \ x + y + \lambda z = 0,\ x + z = 0\}$$

(i) Determinare la dimensione e una base B_U di U.
(ii) Determinare la dimensione e una base B_{W_λ} di W_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) Verificare se esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3 = U \oplus W_\lambda$.
(iv) Ortonormalizzare la base B_U.

(i) Una base di U è costituita dal sistema $S = [(-1, 0, 1), (0, 1, 1)]$, quindi $\dim U = 2$.

(ii) Per determinare una base e la dimensione di W_λ risolviamo il sistema omogeneo: $\left\{ \begin{array}{c} x + y + \lambda z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right.$.

Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associata al sistema omogeneo, si osserva che la matrice $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ha rango 2 in quanto la sottomatrice $M_{1,2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Un generatore del sottospazio vettoriale delle soluzioni si ottiene prendendo il determinante a segno alterno delle sottomatrici che si ottengono cancellando la prima, la seconda e la terza colonna. In definitiva la base di W_λ è data dal vettore $w_\lambda = \left(\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, \lambda - 1, -1)$. Possiamo concludere che $\dim W_\lambda = 1$ e $S_\lambda = [(1, \lambda - 1, -1)]$ è una base di $W_\lambda \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) Consideriamo la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \end{pmatrix}$, sviluppando il determinante con Sarrus si ottiene $|M_\lambda| = \lambda - 1$. Osserviamo che se $\lambda - 1 \neq 0$ ovvero $\lambda \neq 1$ il sottospazio vettoriale somma $U + W_\lambda$ ha dimensione 3. I singoli sottospazi vettoriali U e W_λ hanno rispettivamente dimensione 2 e 1, per la formula di Grassmann $\dim(U \cap W_\lambda) = \dim(U + W_\lambda) - \dim U - \dim W_\lambda = 0$. Possiamo concludere che se $\lambda \neq 1 \Longrightarrow \mathbb{R}^3$ è somma diretta di U e W_λ.

(iv) Consideriamo i vettori $u_1 = (-1, 0, 1)$ e il vettore $u_2 = (0, 1, 1)$ del sistema S.
Poniamo $w_1 = u_1 = (-1, 0, 1)$.
Con procedimento di Gram-Schmidt costruiamo il seguente vettore:

$$\overline{w}_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (0, 1, 1) - \frac{(0, 1, 1) \cdot (-1, 0, 1)}{(-1, 0, 1) \cdot (-1, 0, 1)} (-1, 0, 1) =$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1) = (0, 1, 1) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right),$$ possiamo considerare il vettore proporzionale $w_2 = (1, 2, 1)$. Il sistema $\Gamma = [w_1 = (-1, 0, 1), w_2 = (1, 2, 1)]$ è ortogonale. Sappiamo che $|w_1| = \sqrt{2}$ e $|w_2| = \sqrt{6}$, dividendo ciascun vettore per il proprio modulo si ottiene il sistema ortonormale $\overline{\Gamma} = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right]$.

- **2**. Assegnata la seguente matrice parametrica:

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di H_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Applichiamo il teorema degli orlati, consideriamo la sottomatrice $M_{1,2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; ora se $1 + k \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -1$ tale sottomatrice ha determinante non nullo. Orliamo la sottomatrice precedente con la terza riga e terza colonna, otteniamo la sottomatrice $M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, il determinante della matrice appena scritta è il seguente: $\left|M_{1,2,3}^{1,2,3}\right| = k^3 - k = k(k^2 - 1)$.

Possiamo concludere, per il teorema degli orlati, che se $1 + k \neq 0$ e $k(k^2 - 1) \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -1 \wedge k \neq 0 \wedge$ $k \neq 1 \Longrightarrow \rho(H_k) = 3$.

I casi particolari si possono studiare anche con la riduzione a scala. In questo caso continuo ad utilizzare il teorema degli orlati per utilizzare sempre lo stesso metodo.

Discutiamo il caso $k = -1$.

La matrice diventa $H_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, in tale matrice individuiamo la sottomatrice $M_{2,3}^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante 2 e quindi non nullo. Ovvio che se orliamo tale sottomatrice con la prima riga e prima colonna o prima riga e quarta colona, otteniamo sempre matrici con determinante nullo poichè la prima e seconda riga sono proporzionali. In questo caso concludiamo che $\rho(H_{-1}) = 2$.

Discutiamo il caso $k = 0$.

La matrice diventa $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, consideriamo la sottomatrice $M_{1,2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante non nullo. Non resta che orlare tale sottomatrice con la terza riga e quarta colonna (l'altra possibilità, terza riga e terza colonna, già sappiamo che conduce a un determinate nullo [determinante del minore calcolato nel punto (i) in generale]) otteniamo la sottomatrice $M_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. L'ultima sottomatrice ha determinante -1, possiamo concludere che $\rho(H_0) = 3$.

Discutiamo il caso $k = 1$.

La matrice diventa $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,in tale matrice individuiamo la sottomatrice $M_{1,2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante 2 e quindi non nullo. Ovvio che se orliamo tale sottomatrice con la terza riga e terza colonna o terza riga e quarta colona, otteniamo sempre matrici con determinante nullo poichè in entrambe le matrici ci sono due colonne proporzionali. Anche in questo caso concludiamo che $\rho(H_1) = 2$.

- **3**. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, rispetto alle basi $B = ((0,-1),(-1,0))$ e $B' = ((1,1),(2,-1)$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e $K\operatorname{erf}$.
(ii) Determinare $f(1,-1)$.

(i) Studiando la matrice A_f in relazione al suo rango e al sistema omogeneo ad essa associato è possibile avere informazioni sull'immagine e sul nucleo dell'applicazione lineare.

In questo caso però vogliamo dare la risposta ai quesiti costruendo la legge dell'applicazione lineare. Tale costruzione si basa sul ruolo che rivestono le colonne della matrice A_f rispetto alle due basi.

Noi sappiamo che le colonne della matrice A_f sono le componenti nella base ordinata B' dei trasformati mediante f dei vettori della base ordinata B.

$f(0,-1) = 1 \cdot (1,1) - 1 \cdot (2,-1) = (-1,2)$
$f(-1,0) = -1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (2,-1) = (1,-2)$

Già queste informazioni ci permettono di affermare che il sistema $S = [(-1,2),(1,-2)]$ è un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$. Ricordate che esitono proposizioni a riguardo che affermano le seguenti cose:

(a) Un'applicazione lineare è univocamente determinata quando si fissano le assegnazioni sui vettori di una base ordinata. Osserviamo che $B = ((0,-1),(-1,0))$ è una base ordinata.
(b) Le immagini di un sistema di generatori dello spazio vettoriale dominio, in questo caso $\mathbb{R}^2$, costituisce un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

Dunque $\dim \operatorname{Im} f = 1$ e il sistema $H = [(-1,2)]$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

Ora il generico vettore (x,y) si può scrivere come combinazione lineare dei vettori della base nel seguente modo: $(x,y) = -y(0,-1) - x(-1,0)$, sfruttando la linearità di f si ottiene:

$f(x,y) = f[-y(0,-1) - x(-1,0)] = -yf(0,-1) - xf(-1,0) = -y(-1,2) - x(1,-2) = (-x+y, 2x-2y)$. In forma più compatta $f(x,y) = (-x+y, 2x-2y)$.

Il nucleo dell'applicazione lineare si ottiene risolvendo il sistema omogeneo: $\begin{cases} -x+y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$. Risulta evidente che $K\operatorname{erf} = \{(\alpha,\alpha), \text{con } \alpha \in \mathbb{R}\}$.
Una base di $K\operatorname{erf}$ è data dal sistema $K = [(1,1)]$ e $\dim K\operatorname{erf} = 1$.

(ii) Ovvio che avendo a disposizione la legge che definisce l'applicazione lineare otteniamo $f(1,-1) = (-2,4)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x,y,z) \quad &= \quad (y+z, -x+2y+z, x-y) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(ii) Sulla base dei risultati ottenuti, giustificando le risposte, dire se f è un epimorfismo e determinare una base di $K\,\mathrm{er} f$.

(i)
Consideriamo una base a piacere e senza grosse esitazioni prenderemo quella canonica:
$f(1,0,0) = (0,-1,1)$;
$f(0,1,0) = (1,2,-1)$;
$f(0,0,1) = (1,1,0)$;
La matrice A_f si costruisce mettendo come colonne i vettori immagine dei vettori della base canonica:
$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda \\ p(\lambda) &= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, si ha:
$A_f - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{x - y - z = 0$
Questo sistema è equivalente al seguente:$\{x = y + z$
$V_1 = \{(y+z, y, z) \text{ con } y, z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (1,0,1)$, quindi $V_1 = L\left[(1,1,0),(1,0,1)\right]$. A questo punto già possiamo concludere che l'endomorfismo è diagonalizzabile, l'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ è regolare e l'altro autovalore $\lambda_1 = 0$ essendo una radice semplice è sicuramente regolare.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 0$.
Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 0I = A_f$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = 0$, si ha:
$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
Questo sistema è equivalente al seguente:$\begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases}$
$V_0 = \{(-z,-z,z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_3 = (1,1,-1)$, quindi $V_0 = L\left[(1,1,-1)\right]$.
La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio. Vi ricordo che la matrice P non è univocamente determinata, dipende da quali vettori abbiamo scelto nei relativi autospazi.

In ogni caso la matrice P verifica la seguente relazione: $P^{-1}A_f P = D$ dove $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Una base di autovettori è la seguente: $T = \left[(1,1,0),(1,0,1),(1,1,-1)\right]$.

(ii) Sappiamo che $\lambda_1 = 0$ è un autovalore, tutti e soli i vettori non nulli del nucleo sono autovettori di autovalore 0. Nel nostro caso $K\mathrm{erf} = V_0 = L[(1,1,-1)]$ e quindi f non è un epimorfismo in quanto $\dim \mathrm{Im} f = 3 - \dim K\mathrm{erf} = 3 - 1 = 2$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1,-1,0) \qquad r : \begin{cases} x+y+z=4 \\ y=1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 4-5t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r,s)$.
(ii) Determinare la retta t passante per P ortogonale incidente r.
(iii) Determinare il piano β passante per P parallelo alla retta r e s.
(iv) Determinare la retta l passante per P complanare a r e perpendicolare a s.

(i) Intanto determiniamo la direzione di r calcolando il determinante dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, quindi $\overrightarrow{r} = (1,0,-1)$. I parametri direttori di s sono $\overrightarrow{s} = (1,-2,-5)$, le rette non sono parallele. Le equazioni che definiscono r e s sono incompatibili, perchè se $y = 1 \Longrightarrow -2t = 0 \Longrightarrow t = 0$ (si ottiene dall'equazione di s).

Da un lato $x+y+z=6$ (dalle relazioni di s con $t=0$) e per quanto riguarda le relazioni di r si ottiene $x+y+z=4$. Le rette non hanno punti in comune e quindi sono sghembe.

Vogliamo determinare la comune retta incidente e normale alle due rette assegnate, in primo luogo determineremo la direzione ortogonale a r e s considerando il determinante delle sottomatrici di ordine 2, presi a segno alterno, della seguente matrice:

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = -2$, $\mu = 4$, $\nu = -2$, quindi $\overrightarrow{n} = (1,-2,1)$.

La retta ortogonale è incidente le due rette assegnate si può determinare come intersezione di due piani. Il primo α_1 che contiene la retta r e la direzione della normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette, il secondo α_2 che contiene la retta s e la direzione della normale $\overrightarrow{n}$ alle due rette.

Fascio di piani per r e contenente la direzione $\overrightarrow{n}$: $\lambda(x+y+z-4) + \mu(y-1) = 0$, otteniamo:

$$\lambda x + (\lambda+\mu)y + \lambda z - 4\lambda - \mu = 0$$

imponiamo la condizione che contenga la direzione $\overrightarrow{n}$ e quindi: $(\lambda, \lambda+\mu, \lambda) \cdot (1,-2,1) = 0 \Longrightarrow 0\lambda - 2\mu = 0$, poniamo $\lambda = 1$ e $\mu = 0$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_1 : x+y+z=4$.

Intanto una rappresentazione cartesiana di s è la seguente: $s : \begin{cases} 2x+y=3 \\ 5x+z=9 \end{cases}$.

Fascio di piani per s e contenente la direzione $\overrightarrow{n}$: $\lambda(2x+y-3) + \mu(5x+z-9) = 0$, otteniamo:

$$(2\lambda+5\mu)x + \lambda y + \mu z - 3\lambda - 9\mu = 0$$

imponiamo la condizione che contenga la direzione $\overrightarrow{n}$ e quindi: $(2\lambda+5\mu, \lambda, \mu) \cdot (1,-2,1) = 0 \Longrightarrow 0\lambda + 6\mu = 0$, poniamo $\lambda = 1$ e $\mu = 0$. Sostituendo tali valori nel fascio si ottiene il piano: $\alpha_2 : 2x+y=3$.

La retta incidente e ortogonale sarà l'intersezione di questi ultimi due piani: $n : \begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

Per calcolare la distanza tra le due rette, determineremo un piano π passante per una delle due rette (ad esempio la retta r) e parallelo ad s e nel passaggio successivo la distanza di un qualsiasi punto di s dal piano π, questo valore ci darà la distanza tra le due rette.

Scriviamo il fascio di piani per r che abbiamo già scritto in precedenza:

$$\lambda x + (\lambda + \mu)y + \lambda z - 4\lambda - \mu = 0$$

Per determinare il piano del fascio parallelo ad s imponiamo che la terna delle componenti di un vettore ortogonale al piano e quindi $(\lambda, \lambda + \mu, \lambda)$ sia ortogonale alla terna dei parametri direttori della retta $\overrightarrow{s} = (1, -2, -5)$, quindi $(\lambda, \lambda + \mu, \lambda) \cdot (1, -2, -5) = 0 \iff 3\lambda + \mu = 0 \iff \mu = -3\lambda$. Ponendo $\lambda = 1$ e $\mu = -3$ si ha il piano che soddisfa alla condizione:

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0$$

Ora consideriamo un generico punto della retta s, ad esempio il punto $Q \equiv (1, 1, 4)$ e calcoliamo la distanza di tale punto dal piano appena determinato.

$$d(Q, \pi) = \frac{|1 - 2 + 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(ii) E' sufficiente intersecare il piano β_1 contenente la retta r e passante per $P \equiv (1, -1, 0)$ con il piano β_2 passante per $P \equiv (1, -1, 0)$ e ortogonale alla retta r.

Per β_1 fascio di piani per $r : \lambda(x + y + z - 4) + \mu(y - 1) = 0$, se imponiamo il passaggio per $P \equiv (1, -1, 0)$ otteniamo $-4\lambda - 2\mu = 0$ ovvero $2\lambda + \mu = 0$. Ponendo $\lambda = 1$ e $\mu = -2$ si ottiene $\beta_1 : x - y + z = 2$.

Per β_2 tenendo conto della direzione di r, ovvero $\overrightarrow{r} = (1, 0, -1)$, scriviamo $x - z = d$, imponiamo il passaggio per $P \equiv (1, -1, 0)$ e otteniamo $d = 1$, quindi $\beta_2 : x - z = 1$. In conclusione un'equazione della retta per P ortogonale e incidente s è la seguente: $t : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

(iii) Il piano in questione, oltre a contenere il punto $P \equiv (1, -1, 0)$, deve contenere le direzioni delle rette r e s. La sua equazione si determina sviluppando il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione del piano è la seguente: $\beta : x - 2y + z = 3$.

(iv) Una rappresentazione cartesiana della retta l è data dall'intersezione di due piani. Un piano che contiene r e passa per P e l'altro piano passante per P e perpendicolare a s.

Il primo piano è gia stato calcolato nel punto (ii), si tratta del piano $\beta_1 : x - y + z = 2$. Per l'altro piano ω tenendo conto della direzione di s, ovvero $\overrightarrow{s} = (1, -2, -5)$, scriviamo $x - 2y - 5z = d$, imponiamo il passaggio per $P \equiv (1, -1, 0)$ e otteniamo $d = 3$, quindi $\omega : x - 2y - 5z = 3$. In conclusione un'equazione della retta t per P complanare a r e perpendicolare a s è la seguente: $l : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - 2y - 5z = 3 \end{cases}$.