Esame di Geometria e Algebra

Prova scritta 26 Giugno 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(h+k, -k, k) \mid \ h, k \in \mathbb{R}\}$$

$$W_\lambda = \{(x, y, z) \mid \ x + y - \lambda z = 0, \ x + z = 0\}$$

(i) Determinare la dimensione e una base B_U di U.
(ii) Determinare la dimensione e una base B_{W_λ} di W_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3 = U \oplus W_\lambda$.
(iv) Ortonormalizzare la base B_U.

- **2**. Assegnata la seguente matrice parametrica:

$$H_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ -k & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di H_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- **3**. La matrice dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, rispetto alle basi $B = ((0, -1), (-1, 0))$ e $B' = ((1, 1), (2, 3)$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e $K\mathrm{er} f$.
(ii) Determinare $f(1, -1)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) \quad &= \quad (2x - y + z, x + z, -x + y) \end{aligned}$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(ii) Sulla base dei risultati ottenuti, giustificando le risposte, dire se f è un epimorfismo e determinare una base di $K\mathrm{er} f$.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, 0) \qquad r : \begin{cases} x - y - z = -2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:
(i) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s. Calcolare $d(r, s)$.
(ii) Determinare la retta t passante per P ortogonale incidente r.
(iii) Determinare il piano β passante per P parallelo alla retta r e s.
(iv) Determinare la retta l passante per P complanare a r e perpendicolare a s.