

Esame di Geometria e Algebra

Prova scritta 26 Giugno 2012

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^3, \cdot) siano assegnati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{(-h, k, -h + k) \mid h, k \in \mathbb{R}\}$$

$$W_\lambda = \{(x, y, z) \mid x - y - \lambda z = 0, x + z = 0\}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base B_U di U .
- (ii) Determinare la dimensione e una base B_{W_λ} di W_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) Verificare se esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3 = U \oplus W_\lambda$.
- (iv) Ortonormalizzare la base B_U .

- 2. Assegnata la seguente matrice parametrica:

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & -1 \\ k & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare il rango di H_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- 3. La matrice dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rispetto alle basi $B = ((0, -1), (-1, 0))$ e $B' = ((1, 1), (-1, 2))$, è la seguente:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base di $\text{Im } f$ e K erf.
- (ii) Determinare $f(1, -1)$.

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^3 :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y, z) = (-y - z, x - 2y - z, -x + y)$$

(i) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f .

(ii) Sulla base dei risultati ottenuti, giustificando le risposte, dire se f è un epimorfismo e determinare una base di K erf.

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, -1, 0) \quad r : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

Risolvere i seguenti punti:

- (i) Verificare che le rette r e s sono sghembe, determinare la retta normale e incidente r e s . Calcolare $d(r, s)$.
- (ii) Determinare la retta t passante per P ortogonale incidente r .
- (iii) Determinare il piano β passante per P parallelo alla retta r e s .
- (iv) Determinare la retta l passante per P complanare a r e perpendicolare a s .