Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 24 Gennaio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome____________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_m = [(-1,0,-1,-m),(1,1,-m,-1)] \qquad K = [(1,0,-1,1),(-1,0,0,-1),(3,0,-1,3)]$$

(i) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $L(K)$.
(ii) Dire se esistono valori $m \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$.
(iii) Determinare la dimensione e una base di $(L(H_m) + L(K))^{\perp}$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.
(iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0,\pi]$ individuato dai vettori del sistema H_0.

(i) Controlliamo se il sistema K è linearmente indipendente. Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $M_{1,2}^{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, orlando con la terza riga e la quarta colonna si ottiene la matrice $M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ con determinate nullo.

Osserviamo che abbiamo evitato di calcolare l'altro orlato $M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ perchè il suo determinante è palesemente nullo. Possiamo concludere che la matrice M ha rango 2 e il sistema K è linearmente dipendente, i precedenti calcoli ci dicono anche che $L(K) = L[(1,0,-1,1),(-1,0,0,-1)]$, la dimensione di $L(K)$ è 2 e una sua sua base è $H = [(1,0,-1,1),(-1,0,0,-1)]$. Osserviamo che si arrivava alla stessa conclusione se si procedeva con la riduzione a scala della matrice M o si osservava che $v_1 - 2v_2 = v_3$. Possiamo scrivere che $L(K) = \{a(1,0,-1,1) + b(-1,0,0,-1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a-b, 0, -a, a-b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, eliminando i parametri e con i soliti passaggi si trova una rappresentazione cartesiana di $L(K) = \{(x,y,z,t) \mid x - t = 0, y = 0\}$.

(ii) Intanto osserviamo che $L(H_m)$ ha dimensione 2 in quanto la matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -m \\ 1 & 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\forall m \in \mathbb{R}$. Per studiare la dimensione di $L(H_m) + L(K)$ consideriamo la matrice $T_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -m \\ 1 & 1 & -m & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, applicando Laplace alla seconda colonna si trova $|T_m| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -m \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = m - 1.$
A questo punto possiamo concludere che se $m - 1 \neq 0$ ovvero $m \neq 1$ allora $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$, a dire il vero la somma è diretta (controllare l'intersezione con l'equazione dimensionale).

(iii) Se $m \neq 1$ sappiamo che $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$ e in questo caso $(L(H_m) + L(K))^{\perp} = (\mathbb{R}^4)^{\perp} = \{(0,0,0,0)\}$, la sua dimensione è 0 e in tal caso si conviene di considerare come base del sottospazio vettoriale nullo l'insieme $B = \varnothing$.

Se $m = 1$ la matrice diventa $T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, sappiamo che il suo determinante è nullo, osserviamo che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinate non nullo e quindi in questo caso $L(H_1) + L(K) = L[(1,1,-1,-1),(1,0,-1,1),(-1,0,0,-1)]$ e la sua dimensione è 3. Osserviamo che $(L(H_1) + L(K))^{\perp} = \{(x,y,z,t) \mid x + y - z - t = 0, x - z + t = 0, x + t = 0\}$. La dimensione di $(L(H_1) + L(K))^{\perp}$ è 1 e una sua base si trova nel seguente modo:

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, 0, -1).$$

Possiamo concludere che $(L(H_1) + L(K))^{\perp} = L[(1, -2, 0, -1)]$ e una sua base è costituita dal sistema $[(1, -2, 0, -1)]$.

(iv) Il sistema $H_0 = [(-1, 0, -1, 0), (1, 1, 0, -1)]$, per determinare l'angolo otteniamo $\cos\alpha = \dfrac{(-1, 0, -1, 0) \cdot (1, 1, 0, -1)}{|(-1, 0, -1, 0)|\,|(1, 1, 0, -1)|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ e quindi $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - kz = k \\ x + ky - z + t = -1 \\ kx + y - z = k \\ x = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare parametrico non omogeneo di 5 equazioni in 4 variabili. Ricordate che tali sistemi lineari meritano un'attenzione particolare (sono sistemi lineari di $n+1$ equazioni lineari in n variabili). Se la matrice completa ha rango 5, il sistema lineare è incompatibile. Scriviamo la matrice completa del sistema lineare:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -k & 0 & k \\ 1 & k & -1 & 1 & -1 \\ k & 1 & -1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, utilizzando la regola di Laplace possiamo calcolare il suo determinante secondo la quinta riga e successivamente la terza colonna:: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 & k \\ k & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -k & k \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} =$ $k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$. Ovvio che se $k \neq 1$ il rango della matrice completa è 5 e quello della matrice incompleta è al più 4. Per il teorema di Rouchè-Capelli possiamo concludere che il sistema lineare è incompatibile, dunque se $k \neq 1 \Longrightarrow S_k = \varnothing$.

Se $k = 1$ la matrice del sistema lineare diventa: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, applicando Gauss-Jordan si ha: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il sistema lineare equivalente diventa:

$\begin{cases} x + y = h + 1 \\ y = h + 1 \\ -t = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = h + 1 \\ t = -2 \end{cases}$. Possiamo concludere che $S_1 = \{(0, h+1, h, -2) \mid h \in \mathbb{R}\}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

  (a) Il vettore $u = (0, -3, 3)$ è l'immagine di un autovettore di autovalore $\lambda = 3$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

La nostra applicazione lineare deve verificare la condizione $f(0, -1, 1) = 3(0, -1, 1) = (0, -3, 3)$.

Ora dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S = [(0, -1, 1)]$, noi prenderemo l'estensione: $C = [(0, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)]$. Teniamo conto che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e conseguentemente $\dim K\operatorname{erf} = 1$.

Poniamo $f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ (un vettore immagine arbitrario purchè non proporzionale all'immagine dell'autovettore per garantirsi $\dim \operatorname{Im} f = 2$).

Riepiloghiamo le immagini sui vettori della base:
$f(0, -1, 1) = (0, -3, 3)$
$f(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$
$f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$
Ora $(x, y, z) = \alpha(0, -1, 1) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1) \iff (x, y, z) = (\beta, -\alpha, \alpha + \gamma) \iff$

$$\begin{cases} \beta = x \\ -\alpha = y \\ \alpha + \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -y \\ \beta = x \\ \gamma = y + z \end{cases}$$

Possiamo scrivere $f(x, y, z) = f\left[\alpha(0, -1, 1) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1)\right] = f\left[-y(0, -1, 1) + x(1, 0, 0) + (y + z)(0, 0, 1)\right] =$
$= -yf(0, -1, 1) + xf(1, 0, 0) + (y + z)f(0, 0, 1) = -y(0, -3, 3) + x(0, 0, 0) + (y + z)(1, 0, 1) =$
$(y + z, 3y, -2y + z)$.

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x, y, z) = (y + z, 3y, -2y + z)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x, y, z, t) &= (3x - 5y + 5z - 5t, -2y, -2z, -2t) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento canonico $C = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.

(iii) Sulla base dei risultati precedenti è possibile dire che f è un epimorfismo?

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ e il punto (i) è risolto.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $$A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$, si ha:

$$p(\lambda)=|A_f-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(-2-\lambda)^3(3-\lambda)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$ e $\lambda_4=3$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$.

Utilizzando la matrice $A_f-\lambda I=A_f+2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$, si ha:

$$A_f{+}2I=\begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\{x-y+z-t=0$$. L'autospazio $V_{-2}=\{(y-z+t,y,z,t)$ con $y,z,t\in\mathbb{R}\}$

e una sua base è costituita dai vettori: $u_1=(1,1,0,0)$ e $u_2=(-1,0,1,0)$, $u_3=(1,0,0,1)$ quindi $V_{-2}=L\left[(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_4=3$. Utilizzando la matrice A_f-3I, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$$A_f-3I=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$$. L'autospazio $V_3=\{(x,0,0,0)$ con $x\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_4=(1,0,0,0)$, quindi $V_3=L\left[(1,0,0,0)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_fP=D$ dove $D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}A_fP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori è la seguente $S=[(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0)]$.

(iii) L'endomorfismo f è un epimorfismo perchè tutti gli autovalori λ sono non nulli.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P\equiv(2,1,-1)\qquad Q\equiv(3,2,-2)\qquad r:\begin{cases} x-y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}\qquad \pi:x-y+z=2$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e Q.

(ii) Verificare che le rette r e s sono complanari. Determinare il piano α che le contiene e la distanza $d(r,s)$.

(iii) Determinare un'equazione cartesiana della retta n passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s.

(i) La direzione di s si ottiene calcolando le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, -1)$, $s : \left\{ \begin{array}{c} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{array} \right.$,

una forma cartesiana di $s : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$

(ii) Intanto calcoliamo la direzione di r calcolando i determinanti dei minori a segno alterno della matrice $M = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$, $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$. Le due rette sono parallele, questo si può intuire anche guardando i piani che definiscono r e s perchè sono piani paralleli. Osserviamo che le rette sono parallele e distinte in quanto il punto $Q \equiv (3, 2, -2)$ non appartiene a r.

Per calcolare il piano che le contiene determiniamo un punto qualsiasi su r, ad esempio il punto $R \equiv (-1, 0, 1)$. Calcoliamo la direzione del vettore $\overrightarrow{RQ} = (-4, -2, 3)$. Il piano che contiene le due rette deve contenere il punto $Q \equiv (3, 2, -2)$ (va bene un qualsiasi punto appartenente alle rette r e s) e le direzioni di r (la stessa cosa se di s) e la direzione $\overrightarrow{RQ} = (-4, -2, 3)$. Il piano è il seguente:

$$\begin{array}{lcl} \alpha & : & \left| \begin{array}{ccc} x - 3 & y - 2 & z + 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{array} \right| = 0 \\ \alpha & : & x + y + 2z = 1 \end{array}$$

Per calcolare la distanza tra le due rette consideriamo il generico punto di $s : \left\{ \begin{array}{c} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{array} \right.$, sarà $P_s = (3 + t, 2 + t, -2 - t)$. Calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{RP_s} = (4 + t, 2 + t, -3 - t)$, ora imponiamo che tale vettore sia ortogonale alla direzione di s, si ha:

$$(4 + t, 2 + t, -3 - t) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Longleftrightarrow 3t + 9 = 0 \Longleftrightarrow t = -3.$$

Al valore $t = -3$ su s corrisponde il punto $P_s = (0, -1, 1)$, non resta che calcolare la distanza $\overline{RP_s} = \sqrt{2}$, concludiamo che $d(r, s) = \sqrt{2}$.

(iii) La retta cercata si trova in un piano per l'origine e parallelo al piano $\pi : x - y + z = 2$, dunque il piano è $\gamma : x - y + z = 0$. Per essere ortogonale a s si deve trovare anche in un piano per l'origine e ortogonale a s, dunque il piano $\delta : x + y - z = 0$.

La retta cercata è la seguente: $n : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$