Esame di Geometria e Algebra

Matr.__________________

Prova scritta 24 Gennaio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE) Cognome e Nome________________________________

- **1**. Nello spazio vettoriale euclideo canonico $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_m = [(1, 0, -m, -1), (m, 1, -1, 1)] \qquad K = [(1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1), (1, 0, -1, 1)]$$

(i) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $L(K)$.
(ii) Dire se esistono valori $m \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$.
(iii) Determinare la dimensione e una base di $(L(H_m) + L(K))^{\perp}$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.
(iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori del sistema H_0.

(i) Controlliamo se il sistema K è linearmente indipendente. Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $M^{1,3}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, orlando con la terza riga e la quarta colonna si ottiene la matrice $M^{1,3,4}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinate nullo. Osserviamo che abbiamo evitato di calcolare l'altro orlato $M^{1,2,3}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ perchè il suo determinante è palesemente nullo. Possiamo concludere che la matrice M ha rango 2 e il sistema K è linearmente dipendente, i precedenti calcoli ci dicono anche che $L(K) = L[(1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1)]$, la dimensione di $L(K)$ è 2 e una sua sua base è $H = [(1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1)]$. Osserviamo che si arrivava alla stessa conclusione se si procedeva con la riduzione a scala della matrice M o si osservava che $v_1 - 2v_2 = v_3$. Possiamo scrivere che $L(K) = \{a(1, 0, 1, -1) + b(0, 0, 1, -1) |\ a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, 0, a + b, -a - b) |\ a, b \in \mathbb{R}\}$, eliminando i parametri e con i soliti passaggi si trova una rappresentazione cartesiana di $L(K) = \{(x, y, z, t) |\ z + t = 0, y = 0\}$.

(ii) Intanto osserviamo che $L(H_m)$ ha dimensione 2 in quanto la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m & -1 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\forall m \in \mathbb{R}$. Per studiare la dimensione di $L(H_m) + L(K)$ consideriamo la matrice $T_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m & -1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, applicando Laplace alla seconda colonna si trova $|T_m| = \begin{vmatrix} 1 & -m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m - 1$. A questo punto possiamo concludere che se $-m - 1 \neq 0$ ovvero $m \neq -1$ allora $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$, a dire il vero la somma è diretta (controllare l'intersezione con l'equazione dimensionale).

(iii) Se $m \neq -1$ sappiamo che $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$ e in questo caso $(L(H_m) + L(K))^{\perp} = (\mathbb{R}^4)^{\perp} = \{(0, 0, 0, 0)\}$, la sua dimensione è 0 e in tal caso si conviene di considerare come base del sottospazio vettoriale nullo l'insieme $B = \varnothing$.

Se $m = -1$ la matrice diventa $T_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, sappiamo che il suo determinante è nullo, osserviamo che la sottomatrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinate non nullo e quindi in questo caso $L(H_{-1}) + L(K) = L[(-1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1)]$ e la sua dimensione è 3. Osserviamo che $(L(H_{-1}) + L(K))^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z - t = 0, x + z - t = 0, z - t = 0\}$. La dimensione di $(L(H_{-1}) + L(K))^{\perp}$ è 1 e una sua base si trova nel seguente modo:

$\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (0,0,1,1)$. Possiamo concludere che $(L(H_{-1}) + L(K))^{\perp} = L[(0,0,1,1)]$ e una sua base è costituita dal sistema $[(0,0,1,1)]$.

(iv) Il sistema $H_0 = [(1,0,0,-1),(0,1,-1,1)]$, per determinare l'angolo otteniamo $\cos\alpha = \dfrac{(1,0,0,-1)\cdot(0,1,-1,1)}{|(1,0,0,-1)|\,|(0,1,-1,1)|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ e quindi $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

- **2**. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t:

$$\begin{cases} x - y + t = 1 \\ x - ky + t = k \\ kx - y + z + t = -1 \\ x - y + kt = k \\ t = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare parametrico non omogeneo di 5 equazioni in 4 variabili.Ricordate che tali sistemi lineari meritano un'attenzione particolare (sono sistemi lineari di $n+1$ equazioni lineari in n variabili). Se la matrice completa ha rango 5, il sistema lineare è incompatibile. Scriviamo la matrice completa del sistema lineare:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 0 & 1 & k \\ k & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, utilizzando la regola di Laplace possiamo calcolare il suo determinante secondo la terza colonna e successivamente la quarta riga:: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 & k \\ 1 & -1 & k & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -k & k \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 + 2k - 1 = -(k-1)^2$. Ovvio che se $k \neq 1$ il rango della matrice completa è 5 e quello della matrice incompleta è al più 4. Per il teorema di Rouchè-Capelli possiamo concludere che il sistema lineare è incompatibile, dunque se $k \neq 1 \Longrightarrow S_k = \varnothing$.

Se $k = 1$ la matrice del sistema lineare diventa: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, applicando Gauss-Jordan si ha: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il sistema lineare equivalente diventa:

$\begin{cases} x + t = h + 1 \\ -z = 2 \\ t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = h + 1 \\ z = -2 \\ t = 0 \end{cases}$. Possiamo concludere che $S_1 = \{(h+1, h, -2, 0) \mid h \in \mathbb{R}\}$.

- **3**. Assegnato lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^3$, costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

  (a) Il vettore $u = (2, 0, -2)$ è l'immagine di un autovettore di autovalore $\lambda = 2$ e $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

La nostra applicazione lineare deve verificare la condizione $f(1, 0, -1) = 2(1, 0, -1) = (2, 0, -2)$.

Ora dobbiamo estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$ il sistema $S = [(1, 0, -1)]$, noi prenderemo l'estensione: $C = [(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Teniamo conto che $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ e conseguentemente $\dim K\mathrm{erf} = 1$.

Poniamo $f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ (un vettore immagine arbitrario purchè non proporzionale all'immagine dell'autovettore per garantirsi $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$).

Riepiloghiamo le immagini sui vettori della base:
$f(1, 0, -1) = (2, 0, -2)$
$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$
$f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$
Ora $(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \iff (x, y, z) = (\alpha, \beta, -\alpha + \gamma) \iff$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ -\alpha + \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ \gamma = x + z \end{cases}$$

Possiamo scrivere $f(x, y, z) = f[\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)] = f[x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) + (x + z)(0, 0, 1)] =$
$= xf(1, 0, -1) + yf(0, 1, 0) + (x + z)f(0, 0, 1) = x(2, 0, -2) + y(0, 0, 0) + (x + z)(1, 0, 1) =$
$(3x + z, 0, -x + z)$.

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x, y, z) = (3x + z, 0, -x + z)$.

- **4**. Assegnato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x, y, z, t) &= (2x, 2y, 3x - 3y - z + 3t, 2t) \end{aligned}$$

(i) Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento canonico $C = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
(ii) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f, nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f.
(iii) Sulla base dei risultati precedenti è possibile dire che f è un monomorfismo?

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:
$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e il punto (i) è risolto.

(ii) Determiniamo il polinomio caratteristico:
Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda)=|A_f-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3(-1-\lambda)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ e $\lambda_4=-1$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

Utilizzando la matrice $A_f-\lambda I=A_f-2I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, si ha:

$A_f-2I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\{x-y-z+t=0$. L'autospazio $V_2=\{(y+z-t,y,z,t)$ con $y,z,t\in\mathbb{R}\}$

e una sua base è costituita dai vettori: $u_1=(1,1,0,0)$ e $u_2=(1,0,1,0)$, $u_3=(-1,0,0,1)$ quindi $V_2=L\left[(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\right]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_4=-1$. Utilizzando la matrice A_f+I, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$A_f+I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}$. L'autospazio $V_{-1}=\{(0,0,z,0)$ con $z\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è costituita dal vettore: $u_4=(0,0,1,0)$, quindi $V_{-1}=L\left[(0,0,1,0)\right]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$P^{-1}A_fP=D$ dove $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, infatti si ha:

$$P^{-1}A_fP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori è la seguente $S=[(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1),(0,0,1,0)]$.

(iii) L'endomorfismo f è un monomorfismo perchè tutti gli autovalori λ sono non nulli.

- **5**. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P\equiv(2,-1,-1)\qquad Q\equiv(0,1,1)\qquad r:\begin{cases} x+y=-1 \\ y-z=2 \end{cases}\qquad \pi: x+y-z=-1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e Q.

(ii) Verificare che le rette r e s sono complanari. Determinare il piano α che le contiene e la distanza $d(r,s)$.

(iii) Determinare un'equazione cartesiana della retta n passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s.

(i) La direzione di s si ottiene calcolando le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ}=(-2,2,2)\sim(1,-1,-1)$,

$s: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}$, una forma cartesiana di $s: \begin{cases} x+y=1 \\ y-z=0 \end{cases}$

(ii) Intanto calcoliamo la direzione di r calcolando i determinanti dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$. Le due rette sono parallele, questo si può intuire anche guardando i piani che definiscono r e s perchè sono piani paralleli. Osserviamo che le rette sono parallele e distinte in quanto il punto $Q \equiv (0,1,1)$ non appartiene a r.

Per calcolare il piano che le contiene determiniamo un punto qualsiasi su r, ad esempio il punto $R \equiv (-1,0,-2)$. Calcoliamo la direzione del vettore $\overrightarrow{RQ} = (1,1,3)$. Il piano che contiene le due rette deve contenere il punto $Q \equiv (0,1,1)$ (va bene un qualsiasi punto appartenente alle rette r e s) e le direzioni di r (la stessa cosa se di s) e la direzione $\overrightarrow{RQ} = (1,1,3)$. Il piano è il seguente:

$$\begin{aligned} \alpha \quad &: \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \alpha \quad &: \quad x + 2y - z = 1 \end{aligned}$$

Per calcolare la distanza tra le due rette consideriamo il generico punto di $s: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}$, sarà $P_s = (2+t, -1-t, -1-t)$. Calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{RP_s} = (3+t, -1-t, 1-t)$, ora imponiamo che tale vettore sia ortogonale alla direzione di s, si ha:

$$(3+t, -1-t, 1-t) \cdot (-1,1,1) = 0 \Longleftrightarrow -3t - 3 = 0 \Longleftrightarrow t = -1.$$

Al valore $t = -1$ su s corrisponde il punto $P_s = (1,0,0)$, non resta che calcolare la distanza $\overline{RP_s} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, concludiamo che $d(r,s) = 2\sqrt{2}$.

(iii) La retta cercata si trova in un piano per l'origine e parallelo al piano $\pi : x + y - z = -1$, dunque il piano è $\gamma : x + y - z = 0$. Per essere ortogonale a s si deve trovare anche in un piano per l'origine e ortogonale a s, dunque il piano $\delta : x - y - z = 0$.

La retta cercata è la seguente: $n: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$