

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 24 Gennaio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_m = [(-m, 0, 1, -1), (-1, 1, m, 1)] \quad K = [(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1), (-1, 0, 1, 3)]$$

- (i) Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $L(K)$.
- (ii) Dire se esistono valori $m \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$.
- (iii) Determinare la dimensione e una base di $(L(H_m) + L(K))^\perp$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.
- (iv) Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori del sistema H_0 .

(i) Controlliamo se il sistema K è linearmente indipendente. Consideriamo la matrice $M =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
, applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $M_{1,2}^{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, orlando con la terza

riga e la quarta colonna si ottiene la matrice $M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con determinate nullo. Osserviamo che

abbiamo evitato di calcolare l'altro orlato $M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ perchè il suo determinante è palesemente

nullo. Possiamo concludere che la matrice M ha rango 2 e il sistema K è linearmente dipendente, i precedenti calcoli ci dicono anche che $L(K) = L[(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1)]$, la dimensione di $L(K)$ è 2 e una sua base è $H = [(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1)]$. Osserviamo che si arrivava alla stessa conclusione se si procedeva con la riduzione a scala della matrice M o si osservava che $v_1 - 2v_2 = v_3$. Possiamo scrivere che $L(K) = \{a(1, 0, 1, 1) + b(1, 0, 0, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a+b, 0, a, a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, eliminando i parametri e con i soliti passaggi si trova una rappresentazione cartesiana di $L(K) = \{(x, y, z, t) \mid x - 2z + t = 0, y = 0\}$.

(ii) Intanto osserviamo che $L(H_m)$ ha dimensione 2 in quanto la matrice $S = \begin{pmatrix} -m & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\forall m \in \mathbb{R}$. Per studiare la dimensione di $L(H_m) + L(K)$ consideriamo la matrice $T_m =$
$$\begin{pmatrix} -m & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
, applicando Laplace alla seconda colonna si trova $|T_m| = \begin{vmatrix} -m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = m + 3$. A

questo punto possiamo concludere che se $m + 3 \neq 0$ ovvero $m \neq -3$ allora $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$, a dire il vero la somma è diretta (controllare l'intersezione con l'equazione dimensionale).

(iii) Se $m \neq -3$ sappiamo che $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$ e in questo caso $(L(H_m) + L(K))^\perp = (\mathbb{R}^4)^\perp = \{(0, 0, 0, 0)\}$, la sua dimensione è 0 e in tal caso si conviene di considerare come base del sottospazio vettoriale nullo l'insieme $B = \emptyset$.

Se $m = -3$ la matrice diventa $T_{-3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, sappiamo che il suo determinante è nullo, osserviamo che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinate non nullo e quindi in questo caso $L(H_{-3}) + L(K) = L[(-1, 1, -3, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1)]$ e la sua dimensione è 3. Osserviamo che

$(L(H_{-3}) + L(K))^{\perp} = \{(x, y, z, t) \mid x - y + 3z - t = 0, x + z + t = 0, x - t = 0\}$. La dimensione di $(L(H_{-3}) + L(K))^{\perp}$ è 1 e una sua base si trova nel seguente modo:

$$\left(\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), - \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right) = (-1, 6, 2, -1).$$

Possiamo concludere che $(L(H_{-3}) + L(K))^{\perp} = L[(-1, 6, 2, -1)]$ e una sua base è costituita dal sistema $[(-1, 6, 2, -1)]$.

(iv) Il sistema $H_0 = [(0, 0, 1, -1), (-1, 1, 0, 1)]$, per determinare l'angolo otteniamo $\cos \alpha = \frac{(0, 0, 1, -1) \cdot (-1, 1, 0, 1)}{|(0, 0, 1, -1)| |(-1, 1, 0, 1)|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ e quindi $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

- 2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t :

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ kx - y - z = -k \\ x - ky - z - t = 1 \\ x - y - kz = -k \\ z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Siamo in presenza di un sistema lineare parametrico non omogeneo di 5 equazioni in 4 variabili. Ricordate che tali sistemi lineari meritano un'attenzione particolare (sono sistemi lineari di $n + 1$ equazioni lineari in n variabili). Se la matrice completa ha rango 5, il sistema lineare è incompatibile. Scriviamo la matrice completa del sistema lineare:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ k & -1 & -1 & 0 & -k \\ 1 & -k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ utilizzando la regola di Laplace possiamo calcolare il suo}$$

determinante secondo la quarta colonna e successivamente la quarta riga: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ k & -1 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -k & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ k & -1 & -k \\ 1 & -1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$. Ovvio che se $k \neq 1$ il rango della matrice completa è 5 e quello della matrice incompleta è al più 4. Per il teorema di Rouchè-Capelli possiamo concludere che il sistema lineare è incompatibile, dunque se $k \neq 1 \implies S_k = \emptyset$.

Se $k = 1$ la matrice del sistema lineare diventa: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, applicando Gauss-

$$\text{Jordan si ha: } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il sistema lineare equivalente diventa:

$$\begin{cases} x - z = h - 1 \\ z = 0 \\ t = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = h - 1 \\ z = 0 \\ t = -2 \end{cases} . \text{ Possiamo concludere che } S_1 = \{(h - 1, h, 0, -2) \mid h \in \mathbb{R}\}.$$

- 3. Assegnato lo spazio vettoriale canonico \mathbb{R}^3 , costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $u = (2, -2, 0)$ è l'immagine di un autovettore di autovalore $\lambda = -2$ e $\dim \text{Im } f = 2$.

La nostra applicazione lineare deve verificare la condizione $f(-1, 1, 0) = -2(-1, 1, 0) = (2, -2, 0)$.

Ora dobbiamo estendere ad una base di \mathbb{R}^3 il sistema $S = [(-1, 1, 0)]$, noi prenderemo l'estensione: $C = [(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Teniamo conto che $\dim \text{Im } f = 2$ e conseguentemente $\dim \text{Ker } f = 1$.

Poniamo $f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ (un vettore immagine arbitrario purchè non proporzionale all'immagine dell'autovettore per garantirsi $\dim \text{Im } f = 2$).

Riepiloghiamo le immagini sui vettori della base:

$$f(-1, 1, 0) = (2, -2, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

$$\text{Ora } (x, y, z) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \iff (x, y, z) = (-\alpha, \alpha + \beta, \gamma) \iff \begin{cases} -\alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -x \\ \beta = x + y \\ \gamma = z \end{cases}$$

$$\text{Possiamo scrivere } f(x, y, z) = f[\alpha(-1, 1, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)] = f[-\alpha(-1, 1, 0) + (x + y)(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)] = -\alpha f(-1, 1, 0) + (x + y)f(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = -x(2, -2, 0) + (x + y)(0, 0, 0) + z(1, 0, 1) = (-2x + z, 2x, z).$$

In sintesi l'endomorfismo costruito è il seguente: $f(x, y, z) = (-2x + z, 2x, z)$.

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^4 :

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x, y, z, t) = (3x, 3y, -5x + 5y - 2z + 5t, 3t)$$

- Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento canonico $C = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
- Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f .
- Sulla base dei risultati precedenti è possibile dire che f è un isomorfismo?

La matrice A_f si costruisce mettendo in colonna le componenti delle immagine dei vettori della base, rispetto alla base assegnata:

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e il punto (i) è risolto.}$$

- Determiniamo il polinomio caratteristico:

Ponendo $A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -2 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$, si ha:

$$p(\lambda) = |A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -2 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^3 (-2 - \lambda)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = -2$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Utilizzando la matrice $A_f - \lambda I = A_f - 3I$, scriviamo il sistema omogeneo associato a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, si ha:

$$A_f - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x - y + z - t = 0\}. \text{ L'autospazio } V_3 = \{(y - z + t, y, z, t) \text{ con } y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

e una sua base è costituita dai vettori: $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 1)$ quindi $V_3 = L[(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$.

Calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_4 = -2$. Utilizzando la matrice $A_f + 2I$, scriviamo il sistema omogeneo, si ha:

$$A_f + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}. \text{ L'autospazio } V_{-2} = \{(0, 0, z, 0) \text{ con } z \in \mathbb{R}\} \text{ e una sua}$$

base è costituita dal vettore: $u_4 = (0, 0, 1, 0)$, quindi $V_{-2} = L[(0, 0, 1, 0)]$.

La matrice che diagonalizza la A_f è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P si costruisce mettendo come colonne i vettori di una base relativa a ciascun autospazio.

E' facile verificare che per essa vale la seguente relazione:

$$P^{-1}A_fP = D \text{ dove } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ infatti si ha:}$$

$$P^{-1}A_fP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori è la seguente $S = [(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]$.

(iii) L'endomorfismo f è un isomorfismo perchè tutti gli autovalori λ sono non nulli.

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (-1, 2, -1) \quad Q \equiv (1, 0, 1) \quad r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad \pi : x + y + z = 1$$

Risolvere i seguenti punti:

(i) Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e Q .

(ii) Verificare che le rette r e s sono complanari. Determinare il piano α che le contiene e la distanza $d(r, s)$.

(iii) Determinare un'equazione cartesiana della retta n passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s .

(i) La direzione di s si ottiene calcolando le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 2) \sim (1, -1, 1)$,

$$s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ una forma cartesiana di } s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(ii) Intanto calcoliamo la direzione di r calcolando i determinanti dei minori a segno alterno della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, \mu = -1, \nu = 1$. Le due rette sono parallele, questo si può intuire anche guardando i piani che definiscono r e s perchè sono piani paralleli. Osserviamo che le rette sono parallele e distinte in quanto il punto $Q \equiv (1, 0, 1)$ non appartiene a r .

Per calcolare il piano che le contiene determiniamo un punto qualsiasi su r , ad esempio il punto $R \equiv (2, 0, 3)$. Calcoliamo la direzione del vettore $\overrightarrow{RQ} = (1, 0, 2)$. Il piano che contiene le due rette deve contenere il punto $Q \equiv (1, 0, 1)$ (va bene un qualsiasi punto appartenente alle rette r e s) e le direzioni di r (la stessa cosa se di s) e la direzione $\overrightarrow{RQ} = (1, 0, 2)$. Il piano è il seguente:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha : 2x + y - z = 1$$

Per calcolare la distanza tra le due rette consideriamo il generico punto di s : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$, sarà

$P_s = (-1 + t, 2 - t, -1 + t)$. Calcoliamo le componenti del vettore $\overrightarrow{RP_s} = (-3 + t, 2 - t, -4 + t)$, ora imponiamo che tale vettore sia ortogonale alla direzione di s , si ha:

$$(-3 + t, 2 - t, -4 + t) \cdot (1, -1, 1) = 0 \iff t - 3 = 0 \iff t = 3.$$

Al valore $t = 3$ su s corrisponde il punto $P_s = (2, -1, 2)$, non resta che calcolare la distanza $\overline{RP_s} = \sqrt{2}$, concludiamo che $d(r, s) = \sqrt{2}$.

(iii) La retta cercata si trova in un piano per l'origine e parallelo al piano $\pi : x + y + z = 1$, dunque il piano è $\gamma : x + y + z = 0$. Per essere ortogonale a s si deve trovare anche in un piano per l'origine e ortogonale a s , dunque il piano $\delta : x - y + z = 0$.

La retta cercata è la seguente: $n : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$