

Esame di Geometria e Algebra

Matr. _____

Prova scritta 24 Gennaio 2013

Facoltà di Ingegneria Meccanica (Gruppo A-DE)

Cognome e Nome _____

- 1. Nello spazio vettoriale euclideo canonico (\mathbb{R}^4, \cdot) siano assegnati i seguenti elementi:

$$H_m = [(-m, 0, -1, 1), (-1, 1, 1, m)] \quad K = [(-1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (-3, 0, -1, 1)]$$

- Determinare una base e una rappresentazione cartesiana di $L(K)$.
- Dire se esistono valori $m \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathbb{R}^4 = L(H_m) + L(K)$.
- Determinare la dimensione e una base di $(L(H_m) + L(K))^\perp$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.
- Determinare l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ individuato dai vettori del sistema H_0 .

- 2. Assegnato il seguente sistema lineare parametrico nelle variabili x, y, z e t :

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ kx - y - z = -k \\ x - y - kz - t = 1 \\ x - ky - z = -k \\ y = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'insieme delle soluzioni S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- 3. Assegnato lo spazio vettoriale canonico \mathbb{R}^3 , costruire un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente condizione:

(a) Il vettore $u = (3, 0, 3)$ è l'immagine di un autovettore di autovalore $\lambda = -3$ e $\dim \text{Im } f = 2$.

- 4. Assegnato il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^4 :

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x, y, z, t) = (-3x, -3y, -5x - 5y + 2z + 5t, -3t)$$

- Determinare la matrice A_f rispetto al riferimento canonico $C = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
- Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo f , nel caso sia diagonalizzabile determinare una base di autovettori e scrivere la matrice P che diagonalizza A_f .
- Sulla base dei risultati precedenti è possibile dire che f è un automorfismo?

- 5. Nello spazio euclideo canonico tridimensionale sia fissato un sistema di riferimento ortonormale e si considerino i seguenti elementi:

$$P \equiv (1, 1, 2) \quad Q \equiv (-1, -1, 0) \quad r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \pi : x - y - z = -2$$

Risolvere i seguenti punti:

- Determinare una rappresentazione cartesiana della retta s passante per P e Q .
- Verificare che le rette r e s sono complanari. Determinare il piano α che le contiene e la distanza $d(r, s)$.
- Determinare un'equazione cartesiana della retta n passante per l'origine, parallela a π e ortogonale a s .